Ueber Aesthetik der Mathematik

Aesthetisches ist nicht anders zu bestimmen, als irgendein Gegenstand, der der Realität zugehört. Man findet ihn vor, so wird er Aufgabe; seine Definition ist vollendet, wenn man Merkmale anzeigt, durch die er sich bekundet, indem er Einfluß übt und so wirkt. Das Aesthetische erweist sich durch ein Gefallen oder Mißfallen; es ist eine der Seiten, wie wir auf einen Reiz reagieren. Von dieser Reaktion verschieden ist die der Billigung und Mißbilligung. Die eine bezeugt eine ästhetische Komponente, die andere eine ethische. Wir suchen das Angenehme, wir achten und würdigen, was wir billigen; nicht immer suchen wir, was wir billigen. Wollte man bei dieser Definition stehen bleiben, so würde man keinen Fortgang der Diskussion erzielen. Ueber den Geschmack ist nicht zu streiten. Daher kann man vom persönlichen Geschmack her keine Argumente herbeibringen. Aber es gibt so etwas wie einen überpersönlichen Geschmack. Auch er, als Ding der Wirklichkeit, bezeugt sich durch sein Wirken. Er formt nämlich den persönlichen Geschmack im Lauf der Generationen, etwa so wie die Kollektivseele die Seele des Einzelnen. Und die Folge ist, daß das, was ihm entspricht, dauerhaft ist. Daß ein solcher überpersönlicher Geschmack keine bloße Einbildung, kein Hirngespinst ist, erweist sich in der Mathematik fühlbar an deren Geschichte. Sie lehrt uns, daß ungemein viel von der Produktion der schöpferischen Geister vergeht, und daß das wenige, was die Zeiten überdauert, den Geist jedes Mathematikers, der sich in den klassischen Bau der Mathematik versenkt, zur Bewunderung, zum Entzücken hinreißt.

Hier denn ist eine erste Beziehung zwischen dem ästhetischen Wert und dem überpersönlichen Geschmack: Das, was Dauer hat, hat hohen ästhetischen Wert. Die fließende flüchtige Funktion des persönlichen Geschmacks wird also trotz der Verschiedenheit der persönlichen Geschmacksrichtungen durch Vermittlung einer Kollektivseele doch ein voller Erfolg. Der überpersönliche Geschmack folgt gewissen sehr einfachen Gesetzmäßigkeiten. Während aber im Leben und in der Kunst eine Gesetzmäßigkeit eher theoretisch als praktisch festgestellt werden kann, erlangt sie in Ansehung der Mathematik zwar nicht immer, aber doch oft, eine exakt bestimmbare Gestalt.

Das, was Dauer hat, zeichnet sich durch Oekonomie aus. Oekonomie in der Mathematik ist nun oft einfach durch Abzählen der benutzten Hilfsmittel bestimmbar. Als Beispiel mag jener Beweis des Pythagoräischen Lehrsatzes dienen, den Euklid bringt, und den man aus der Quarta her kennt. Er benutzt vierzehn Hilfslinien. Es genügt aber eine einzige Hilfslinie, nämlich das Lot von dem rechtwinkligen Eckpunkt auf die Hypotenuse. Sie zerlegt das ganze Dreieck in zwei ihm ähnliche. Die Summe der beiden Teile ist gleich dem Ganzen an Flächeninhalt, die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke aber verhalten sich wie Quadrate entsprechender Seiten. Also ist die Summe der Quadrate entsprechender Seiten der beiden Teildreiecke gleich dem Quadrat der entsprechenden Seite des ganzen Dreiecks. Wendet man dies auf die Hypotenusen der drei ähnlichen Dreiecke an, so hat man den Satz des Pythagoras. Dieser Beweis, kann man einwenden, benutzt zwar nur eine Hilfslinie, dagegen setzt er mehr Kenntnisse voraus als der Euklidische Beweis mit vierzehn Hilfslinien, der ja ohne den Begriff der ähnlichen Dreiecke auskommt. Gewiß. Aber Euklid bringt den Lehrsatz eben viel zu früh vor. Die Architektur seines Systems ist an dieser Stelle nicht ökonomisch, und so ist er zu einem unökonomischen Beweis gezwungen. Schopenhauer hat bekanntlich der ganzen Systematik des Euklid den Vorwurf gemacht, sie sei zu verzwickt; die Euklidischen Lehrsätze ließen sich einfacher und zwingender aus der Anschauung herleiten. Die Anschauung lehrt uns, was ein Punkt ist, daß durch zwei Punkte eine Gerade geht, daß die gerade Strecke zwischen zwei Punkten die kürzeste Linie zwischen ihnen ist, und vieles mehr. Trotzdem ist sie methodisch nicht als Ersatz für die Systematik Euklids zu verwenden. Für die Konstruktion von Begriffen ist die Anschauung unabweislich, denn die Grundbegriffe stammen aus der Anschauung, sind nicht aus den Regeln der Logik abzuleiten. Für ihre Verknüpfung aber ist die Logik zuständig, während die Anschauung hierbei bald versagt, denn sie folgt den Verknüpfungen nur mit Mühe, und es ist nicht schwer, durch Verknüpfungen die Anschauung zu betrügen, nach der selben Methode, die Aristoteles und nach ihm viele andere verwandt haben, um zu zeigen, daß die Sinne sich betrügen lassen. Der Ort der Funktion der Anschauung ist die Wirklichkeit, der Ort der Funktion der Logik ist die gesetzmäßige Verknüpfung.

Die Oekonomie eines Begriffs erhellt aus dessen Funktion. Es ist die Funktion des Begriffs, das Mannigfaltige zu einen. In der Mathematik nun kann man den Grad der Mannigfaltigkeit, die ein Begriff zu verbinden und zu ordnen hat, abschätzen, wo nicht abmessen. Nehmen wir beispielsweise den Begriff der Sehne. Wo immer ein Kreis in seinem Verhältnis zu einer geraden Linie seiner Ebene betrachtet wird, drängt sich die Strecke der Geraden in den Vordergrund, die im Innern des Kreises liegt. Sie repräsentiert gleichsam das Gemeinsame zwischen den Grundbegriffen des

Kreises und der Geraden. Die Mannigfaltigkeit aller Kreise einer Ebene und die Mannigfaltigkeit aller Geraden der selben Ebene beschreiben somit das Feld, auf dem der Begriff der Sehne funktioniert. Man hat in der Sehne das Beispiel eines Begriffes, dessen Konstruktion ökonomisch ist, denn sie verbraucht nur den logischen Urbegriff des gemeinsamen Inhalts, während seine Mannigfaltigkeit groß ist. Ein Begriff hat eine desto größere Mannigfaltigkeit, je größer die Mannigfaltigkeit der Aenderungen, denen er widersteht. Um dies darzutun, sei noch einmal das Beispiel der Sehne betrachtet. Es gibt unendlich viele Kreise, die mit der selben Geraden die selbe Sehne erzeugen. Gewisse Aenderungen des Kreises also ändern die Sehne noch nicht. Oder nehmen wir das Beispiel zweier Dreiecke, die kongruent sind. Man mag beide Dreiecke in ihrer Ebene beliebig verschieben, sofern sie dabei nur starr bleiben, bleiben sie auch kongruent. Auf dieser großen Mannigfaltigkeit möglicher Bewegungen des Dreiecks beruht die Oekonomie des Begriffs der Kongruenz. Bei ihrem weiteren Fortschritt erschafft die Mathematik im neunzehnten Jahrhundert den Begriff der Invarianz, um dieses Bleibende in der Veränderungen Flucht auszudrücken, und so entsteht eine ganze, große, fruchtbare Theorie, die der Invarianten.

Jene Leistung des Denkens, die man Klarheit nennt, wird in der Mathematik dort erreicht, wo die Bedingungen der Geltung eines Satzes vollständig und genau umschrieben sind. Diese Leistung, obwohl sie gebilligt und gewürdigt wird, ist ästhetisch so lange gleichgültig, als nicht das Gefühl für die Oekonomie des damit verknüpften Aufwands lebendig wird. Die Klarheit ist eine Bedingung für das leichte Anknüpfen von Assoziationen. Erreichen diese eine Weite, beflügeln und erwärmen sie die Phantasie, geschieht dies alles wie spielerisch, so ist die ästhetische Wirkung sehr stark. Mangel an Oekonomie der Klarheit wird als ein Manko empfunden, zumindest in einem Gefühl des Unbehagens, das sich aber bis zur Revolte, zum Widerwillen steigern kann. Da nun Oekonomie auch Bedingung der Dauer einer Leistung ist, so haben wir in der Oekonomie der Klarheit des Verstehens nicht nur ein ästhetisches sondern auch ein pädagogisches Prinzip; strebt doch die Kunst des Pädagogen gewißlich über den gegenwärtigen Eindruck hinweg zum dauerbaren hin. Ich finde dies Prinzip, sei es ungekannt, sei es zu wenig beachtet, in der pädagogischen Methode unserer Schulen und Universitäten zu wenig befolgt und zu oft verletzt. Beispielsweise werden die Grundregeln der Algebra in der Schule autoritär behauptet, nicht zur Einsicht gebracht.

Sind die Bedingungen der Klarheit eines Lehrsatzes oder Begriffs oben richtig umrissen worden, so sind jene doch nicht die Bedingungen der Klarheit einer Aufgabe. Eine Aufgabe entsteht, ihrer Natur nach, im Lauf einer Entwicklung. Die Lösung soll eine Schwierigkeit überwinden, die man angetroffen hat, und die den bisher verwendeten Mitteln Widerstand geleistet hat. So geschieht es im Lauf der Entwicklung der Wissenschaft, und so wiederholt es sich im Lauf der Entwicklung des Einzelnen. Daher gehört es zu den Bedingungen der Klarheit einer Aufgabe, daß der Ort, der Umstand und der Zweck der Aufgabe angegeben werden. In eine Geschichte, sei es die der Wissenschaft selbst oder die der Erziehung einer Klasse von Personen oder eines Einzelnen, jedenfalls in einen geschichtlichen Fluß, paßt sich die Aufgabe ein, dort ist ihre Funktion, und dies muß die Stellung der Aufgabe zur Klarheit bringen. Dies nicht zu tun ist sogar ein ethischer Mangel, hinter dem sich allerlei minderwertige Gefühle verstecken. Es zu versuchen, aber unökonomisch auszuführen ist ästhetisch ein Fehler. Ich möchte, der Deutlichkeit halber, ein Beispiel aus der Praxis der Schulen geben. Unklar wäre die folgende Aufgabe: Berechne $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ Der obigen Bedingung der Klarheit entspräche die folgende Fassung: Es seien x, y, z drei positive irrationale Zahlen, die den Gleichungen $x^2 = 2$, $y^2 = 7$, $z^2 = 5$ genügen. Man zeige, daß der Bruch $\frac{x-1}{y-z}$ positiv ist, erweitere den Bruch, in dessen Nenner eine irrationale Zahl steht, so, daß im Nenner eine ganze Zahl erscheint und bestimme sodann diejenige ganze Zahl n, die bis auf einhalb dem irrationalen Wert des Bruchs am nächsten kommt. Diese Aufgabe ist klar, weil sie das Gebiet umschreibt, in dem die Aufgabe überhaupt Interesse hat, nämlich das Gebiet der irrationalen Zahlen, und innerhalb dieses Gedankenkreises das Ziel der leichten Berechenbarkeit eines verwickelten Bruchs verfolgt. Schön ist die Aufgabe freilich nicht; derlei Aufgaben werden aber leider im Uebermaß gestellt, und, da sie noch dazu in ästhetisch unzureichender Weise formuliert werden, verwirren sie den armen Schüler völlig und lassen ihn vermuten, daß die Mathematik aus unverständlichen Zaubertricks besteht. Nicht nur die Lehrbücher und Lehrmethoden der Mathematiker verstoßen gegen die Forderungen der Klarheit von Aufgaben und der Oekonomie der Bezeichnung, selbst die von Akademien gestellten Preisaufgaben sind Sünder. Da wird etwa gefordert: eine gewisse Disziplin, etwa die der divergenten Reihen, sei zu vervollkommnen.

Damit ist nichts gesagt, denn die Möglichkeiten zum Fortschritt sind unendlich vieldeutig. Fortschritt ist selbst nicht meßbar. Das Historische, aus dem die Aufgabe herauswächst, muß umrissen, das Ziel muß gesteckt, die Bezeichnung muß eindeutig, assoziativ und ökonomisch sein. Dann wird die Preiskommission nicht sagen müssen, die Aufgabe sei falsch verstanden und daher nicht behandelt worden. Wenn sie es sagt, ist die Stellung der Aufgabe zu tadeln. Aber, ach, wie oft hat die Preiskommission sich einer Verlegenheit mit solchem sie selbst inkriminierenden Urteil entzogen.

Die Aufgaben, die ästhetischen Wert beanspruchen, müssen eine Leistung vollbringen. Eine Aufgabe von ungefähr zu stellen ist wie eine Vergewaltigung. Die Aufgabe muß ihre Begründung haben, indem sie dem Bau der Mathematik dient. Wie der Architekt nicht vollendete Bauten hinstellt, ohne vielerlei Pläne, Skizzen, Versuche durchprobt zu haben, kann die Mathematik, wie die Jahrhunderte an ihr bauen, nicht errichtet werden ohne eine Unmenge von Anläufen, Experimenten, plastischen Formungen, die vergänglich sind, wiewohl dem Unvergänglichen dienend. In die Systematik des Baus der Mathematik muß jede Aufgabe hineinpassen, hineinstreben, und die größeren Mittel, die sie zur Verwendung stellt, zu größerer Leistung benutzen; denn darin besteht die Oekonomie einer Aufgabe. Es gibt eine Kunst, sich selbst Aufgaben zu stellen, die die großen Forscher der Mathematik kennen und üben. Aber diese Kunst, in der Cauchy, Gauß, Abel, Riemann, Cantor Meister waren, wird nicht verstanden, nicht gewürdigt, denn sonst würde sie auch im kleinen geübt werden. Wie schön sind die Aufgaben, die aus dem Gebiet der ganzen Zahl und der mathematischen Spiele gestellt werden könnten. Wie regen sie die Phantasie, weil den Bautrieb, an. Wie häßlich, wie zufällig, wie unsystematisch, wie ohne Streben und Leben die Aufgaben der Lehrbücher. Man betrachte, als Beispiel für das Funktionieren des mathematischen Bautriebs, die Stufenreihe der folgenden Aufgaben. Es steht zu erweisen: 1. eine Quadratzahl ist entweder durch 9 teilbar oder läßt bei der Teilung durch 3 den Rest 1. 2. Zwei Quadratzahlen, die keinen Teiler gemein haben, haben eine Summe, die nicht durch 3 teilbar ist. 3. Die Summe zweier Quadratzahlen, die keinen Teiler gemein haben, kann den Teiler 5 haben, doch nicht den Teiler 7. 4. Eine solche Summe kann den Teiler 2 haben und außerdem nur Primzahlteiler, die durch 4 geteilt, den Rest 1 lassen. 5. Keine Primzahl, die durch 4 dividiert Rest 3 läßt, ist Summe zweier Quadrate. 6. Jede Primzahl, die, durch 4 dividiert, Rest 1 läßt, ist Summe zweier Quadrate. 7. Diese Darstellung einer solchen Primzahl ist nur auf e i n e Weise möglich. Hier endlich ist ein Ruhepunkt des Bautriebs, freilich nur, wie immer, ein relativer. Die Hilfsmittel, die zum Beweis obiger sieben Sätze nötig sind, sind jene elementaren, die Euler in seiner Algebra verwendet hat.

Jene ästhetische Kategorie, die man Rhythmus nennt, spielt auch in die Mathematik hinein. Sie beruht, wie überall, auf der Wiederholung, und zwar von Begriffen oder Verknüpfungen oder Beweisarten oder der architektonischen Struktur. Einige dieser Rhythmen sind vor allen anderen gefällig. Der gefälligste hat die Form: Wenn A ist, so ist B, und wenn A nicht ist, so ist B nicht. Beispielsweise: Ein Produkt ungerader Zahlen ist ungerade; ein Produkt von Zahlen, die nicht alle ungerade sind, ist gerade. Eine andere angenehme Form: Wenn eine gewisse Funktion von A und B die Eigenschaft E hat, so hat A oder B die Eigenschaft E. Zum Beispiel: Ist ein Produkt von Polynomen durch $x^2 - 2$ teilbar, so ist einer der Faktoren durch $x^2 - 2$ teilbar. Angenehm wirkt wiederum der Rhythmus: Wenn A zu B in Relation R, so auch B zu A in Relation R. Also etwa: Ist x eine beliebige ganze Zahl, so ist $x^2 - 7$ nie teilbar durch 5, und $x^2 - 5$ nie teilbar durch 7. Sätze ohne Rhythmus müssen viel leisten und sehr ökonomisch sein, um nicht trocken oder gar schleppend zu erscheinen.

Die Oekonomie, das heißt die Kunst mit geringstem Aufwand höchste Leistung zu erzielen, eine Leistung, die den unendlichen Bautrieb anregt und daher die Phantasie beflügelt, zuletzt der Rhythmus, der ebensowohl wie in unseren Ohren auch im Innersten unserer Vernunft braust, sind die Spender ästhetischer Wirkung in der Mathematik. Fast gar nicht beteiligt dagegen ist, was der Mathematiker so oft sucht: die Verallgemeinerung. Gewiß, es gibt manchmal eine Oekonomie in der Verallgemeinerung. Hiervon ein Beispiel: Betrachte ich eine Reihe von positiven Zahlen, die immerfort abnehmen, und frage mich, wann deren Summe konvergent ist, so komme ich leicht auf die Bedingung, daß die Zahlen beliebig klein werden müssen; aber dies ist nicht ökonomisch. Die allgemeine Bedingung ist hier auch zugleich die ökonomische, nämlich, daß die nte Zahl der Reihe, mit n multipliziert, bei wachsendem n unter jeden Betrag fällt. Hier ist die Verallgemeinerung Fortschritt in der Richtung auf Oekonomie, denn der ökonomische Satz enthält unter sich, als Spezialfälle, die weniger ökonomischen. Anders beim Satz, der die Summe der Winkel eines ebenen n-Ecks liefert. Aesthetischen Wert hat hier nur der Satz, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks gleich zwei Rechten ist. Der allgemeinere Satz, worin n beliebig, umschließt zwar logisch den speziellen, aber architektonisch folgt er aus dem Spezialfall $n = 3$, weil eigentlich kein neuer Gedanke, keine irgendwie fühlbare Leistung in der Verallgemeinerung steckt, so daß die größere Verwendung von Mitteln nicht berechtigt erscheint. Kurzum, die Verallgemeinerung als solche ist keine ästhetische Kategorie; entscheidend für ästhetischen Wert sind Aufwand und Leistung und Rhythmus im Gefüge des mathematischen Baus. Die Oekonomie von Aufwand und Leistung sowie der Rhythmus, dessen Herz auch im Gedanklichen schlägt, bestimmen das Schicksal eines mathematischen Werkes.

Der forschende Geist des Mathematikers hat nach allen Seiten hin unendlich viele Richtungen des Fortschritts vor sich. Er ist wie ein Wikinger, der auf schwankem Schiff einen unübersehbaren Ozean befährt. Wohin steuert er? Da kann ihm das ästhetische Gefühl als Kompaß dienen. Es zu entwickeln, zu hüten, zu pflegen muß seine Sorge sein. Die Sorge des mathematischen Geistes aber geht uns alle an. Die Mathematik ist eine unendliche Wissenschaft, die dem Erforscher der Wirklichkeit die ihm notwendigen Formen des Begreifens prägt. Das hat die Mathematik getan, seitdem gemessen und gebaut ward, seitdem Archimedes Naturgesetze formte, sie hat die theoretische Physik zusammengefügt, sie wird einmal der Biologie die neuen Formen zimmern, und dem Philosophen der Zukunft wird sie ein Lehrstoff sein, an dem er seine Kategorien und deren Leistung erprobt. Aber was uns alle angeht, muß in uns allen fest ruhen; denn nur, was in lebendige Seelen geschrieben ist, hat Dauer und Kraft. Daher wird mathematische Kultur, also auch Sinn für Aesthetik des Mathematischen, in der Erziehung eines jeden einen Platz finden müssen.