OPUSCULUM V.

DE FIGURA TELLURIS DETERMINANDA EX ÆQUILIBRIO ET EX MENSURA GRADUUM.

Argumentum opuſculi, & argumenti occaſio.

QUONIAM univerſi labores noſtri ad menſuram gradus meridiani in primis definiendam ſuſcepti ſunt, quæ quidem dimenſio, ut abunde in opuſculo primo expoſui, dirigitur ad figuram Telluris determinandam, & ex hac figuræ ipſius inveſtigatione omnis hæc ipſa dimenſio graduum ortum duxit, agam hìc de hac ipſa figura, ut ea, vel a fluidorum æquilibrio, vel a graduum dimenſione deducitur.

Præcipua quæque enodanda hìc ope Geometriæ.

2. Amplam hoc quidem argumentum tractationem requireret, & ſi vel ea tantummodo colligenda mihi eſſent, quæ ubique proſtant a doctiſſimis viris inventa paſſim, atque vulgata, nec quidquam de meo adderem, vix uno, & ſatis illo quidem immani volumine continerentur. Verum ego quidem omiſſis pluribus, quæ minoris ſunt uſus, præcipua quædam tantummodo, quæ ad hanc rem pertinent, perſequar, in quibus Geometriæ vires experiar, ad quædam, quæ admodum ardua, & ſine calculo integrali intractabilia prorſus videri poſſunt, enodanda, ac penitus evolvenda.

Divisio in duo capita. Proferri hìc quædam etiã olim alibi producta.

3. In duo autem capita totum opusculum partiar. Primo quidem, quæ pertinent ad æquilibrium, expediam, deinde vero, quæ ex graduum dimensionibus consequantur, exponam. Erunt in iis constructiones nonnullæ, atque animadversiones, quas multis ab hinc annis inserui dissertationibus meis aliis, quarum tamen cum admodum pauca exemplaria impressa tum fuerint, atque ex iis ipsis, quæ nimirum occasione publicæ exercitationis sub anni finem distributa fuerant, pars multo maxima perierit, non inutile futurum erit, si eas hìc iterum repetam.

Ordo tractandorum capite 1.

4. Porro primo quidem determinabo figuram, quam in Tellure sive immota, sive motu diurno agitata requirit æquilibrium, ubi vires diriguntur ad idem centrum, utcumque variatis distantiis varientur lege quavis data, quo problemate multo generaliori continetur etiam Hugeniana investigatio figuræ in hypothesi Galileana gravitatis seu decrescentis, sive crescentis in quavis ratione sive directa, sive reciproca distantiarum a centro utcumque multiplicata. Innuam hìc aliquid de figura, quæ oritur ex gravitate quadam directa ad bina centra, tum ex gravitate directa per certas quasdam lineas ad datum quendam locum terminatas, quibus indicatis potius, quam expositis agam demum de figura, quam requirit gravitas non quidem tendens ad idem centrum, sed coalescens ex mutua gravitate particularum omnium agentium in ratione reciproca duplicata distantiarum a se invicem, quam gravitatem ex tot inter se usque adeo consentientibus cælestibus phænomenis tam feliciter Newtonus deduxit, & ex qua tam multa alia novis phænomenis apprime consententia derivavit. Expediam autem, quod ad eam gravitatis legem pertinet, sive Tellus homogenea sit, in quo argumento felicissime sane Mac Laurinus se gessit, sive diversam in diversis distantiis densitatem habeat, de quo casu multo aliter ego quidem sentio, quam summi etiam nostræ ætatis viri senserint, quorum calculos laborare omnino censeo, cum Geometria duce ad conclusiones dela-

delabar prorsus contrarias eorum conclusionibus. Atque ibidem attingam etiam nonnulla, quæ ad irregularem pertinent partium textum.

5. Hæc, quæ ad æquilibrium pertinent, capite primo, tum quod ex graduum mensura deducitur exponam capite secundo. Et primo quidem quid in hypothesi Ellipticæ spheroidis, ex binis gradibus sive Meridiani, sive paralleli cujuspiam, tum quid si Tellus ita compressa sit, ut & Meridiani, & paralleli a figura circulari recedant, consequi debeat, innuam, ac demum quid sine ulla suppositione, si omnes ejusdem meridiani gradus habeantur, de ipsius figura, & magnitudine definire liceat ostendam. Eorum autem occasione alia nonnulla iis analoga, ubi se occasio commoda præbuerit, evolvam. Sed aggrediamur rem ipsam. Ordo pro capite secundo.

CAPUT I.

De figura Telluris, quæ oritur ex æquilibrio.

6. SI Tellus tota esset solida, vel eæ superficiei ipsius partes, quæ fluidæ sunt, nullam inter se conjunctionem haberent, nulla esset ratio inquirendi in figuram ipsius ex æquilibrio, ex eo nimirum, quod ex solius gravitatis consideratione oritur; nam si omnes considerentur vires generis cujuscumque, quibus particulæ in se invicem agunt, & cohærent, ubique in solidis etiam corporibus æquilibrium habetur semper. At quoniam magna superficiei Terrestris pars fluido tegitur, quod gravitati suæ libere obsecundare potest, & in quamcumque plagam ea determinaverit, libere excurrere, eæ autem fluidæ partes quaquaversum in intima Terrarum se insinuant, & inter se conjunguntur, hujus æquilibrium certam figuram requirit, quam tota Tellus proximè habere debet, cum solidæ partes, quæ extant, ut montes, parum admodum se supra ipsam attollant. Ob Mariũ communicationem posse inquiri ex æquilibrio in Terræ figuram.

 7. Por-

Duplex ejus investigationis methodus.

7. Porro duplex est methodus investigandi figuram ab æquilibrio requisitam. Prima est ea, quæ oritur ex directione gravium in superficie fluidi, quæ debet esse perpendicularis ad superficiem ipsam; nam aliter, qua ea directio infra superficiem continuata angulum cum eadem superficie acutum efficeret, in eam partem, ut per declive quoddam planum, deflueret fluidum ipsum: secunda est ea, quæ considerat binos canales intra Tellurem continuatos, fluido plenos, & in æquilibrio positos ita, ut punctum imum æquali utrinque pondere urgeatur.

Quando binæ methodi conspirent, quando secus.

8. Demonstratum jam est illud, esse quasdam gravitatis hypotheses, in quibus licet hac secunda methodo inveniatur æquilibrium, adhuc tamen illud primum æquilibrii genus non habeatur, quo casu fluidum, in quo canales omnes æque in imum punctum ponderent, in æquilibrio non erit, nec consistere poterit. sed perpetuo motu agitabitur, quod quidem accidit in iis hypothesibus tantummodo, in quibus gravitatis vis non a sola distantia pendeat, sed etiam a positione: ubi vero gravia vel ad unicum centrum tendant, vel ad numerum centrorum quemcumque, binæ methodi semper conspirant.

Quæ methodus, & quomodo hic adhibenda sit, ubi gravitas tendit ad datum centrum, vel datam curvam.

9. Id ego quidem theorema hic nequaquam demonstrabo, nec tamen utramque methodum per geometriam simplicem adhibebo, sed unicam illam canalium terminatorum ad centrum pro iis gravitatis hypothesibus, quæ ad unicum centrum dirigunt gravia, vel ad duo, & unicam directionis perpendicularis superficiei, pro hypothesi gravitatis tendentis secundum tangentes datæ cujusdam curvæ. Nam nec in gravitatum genere, quod in Natura nequaquam existit, pluribus hic immorandum esse arbitror, & si forte etiam, quæpiam ex iis hypothesibus in Natura existeret, cum agatur de figura Telluris, quam videmus in æquilibrio perstare (exigui enim quidam motus, ut maris æstus, ut certi in certis locis marium procursus, quos dicimus *le correnti*, parvam admodum æquilibrii perturbationem indicant, cujus etiam ipsius externæ causæ in prom-

in promptu sunt) satis est alteram methodum adhibere solam; si enim æquilibrium habetur, debet & in canalium pondere, & in directione perpendiculari superficiei id æquilibrium haberi, adeoque definito, quid requiratur ad habendum eorum alterum, si id obvenerit determinatum quidpiam, id ipsum in Telluris figura haberi omnino debet. Solum cum pro gravitate tendente ad datum punctum habeatur analytica solutio simplicissima, & quæ cum geometrica ex canalibus deducta conspirat, illam etiam proponam.

Utramque per solam geometriã in gravitate Newtoniana.

10. At ubi de gravitate mutua agendum erit, qua particulæ in se invicem gravitent in ratione reciproca duplicata distantiarum, tum vero generaliter demonstrabo pro casu saltem homogeneitatis, haberi æquilibrium in quovis sensu, & quidem ostendam ad id satis esse, ut generaliter demonstretur, pondus canalium rectilineorum terminatorum ad punctum quodcumque intra omnem massam cum directione quavis exercere in illud punctum vim ponderis æqualem, ut id ipsum accidat in canalibus etiam curvilineis, & ut in superficie sit directio gravitatis ipsi superficiei perpendicularis.

Quo sensu hic accipiatur Telluris motus. Auctoris theoria alibi proposita huc pertinens.

11. Distinguendi jam sunt bini Telluris status, alter quiescentis, alter circa proprium axem circumactæ, & vero etiam, si libet, motu annuo translatæ, ut quam in utroque casu figuram æquilibrium requirit, definiamus. Porro cum dico Tellurem immotam, vel motam, intelligo motum, vel quietem respectivum respectu cujusdam spatii, in quo nos homines includimur cum omnibus corporibus, quæ sub nostros sensus cadunt, respectu cujus spatii concipio in corporibus vim inertiæ, sive determinationem quiescendi, vel movendi uniformiter in directum, sive id ipsum spatium quiescat, sive moveatur motibus quibuscumque, quod quidem spatium si quiescat, movebitur Tellus, & corpora omnia eo inclusa movebuntur; si moveatur motu contrario & æquali motui vel Telluris, vel Jovis, vel cujuscumque puncti materiæ, stabit Tellus, Juppiter, vel id materiæ

riæ punctum, cætera movebuntur motu composito ex eo, quem habent intra id spatium, & ejus spatii motu; si autem moveatur motu diverso a motibus punctorum omnium eo inclusorum, puncta omnia habebunt motum compositum ex suo intra id spatium, & motu illo ejus spatii, ac in omnibus iis casibus motus respectivi omnes intra id ipsum spatium erunt iidem, nec quisquam intra id spatium constitutus ex ullo aut phænomeno, aut naturali argumento undecunque petito, nosse poterit, quid accidat illi spatio.

Theoriæ ejusmodi fundamentum innuitur.

12. Hujusmodi theoriam protuli primum anno 1748 in dissertatione de Maris Æstu, tum eandem in pluribus aliis locis vel exposui, vel confirmavi, sed nuper luculentissime in supplementis ad librum 1. Philosophiæ versibus traditæ a Benedicto Stay, operis sane immortalis, ubi de vi inertiæ agens theoriam ejusmodi explicavi pluribus, ac illud, ut mihi sane persuadeo, demonstravi, vim inertiæ absolutam, sive quæ omnia materiæ puncta determinet ad quiescendum, vel movendum uniformiter in directum respectu spatii absoluti, infiniti, immobilis, nec a priori, ut ajunt, & ex metphysicis principiis, nec a posteriori, & ex phænomenis demonstrari posse, & solum posse assumi respectivam respectu spatii, quo includimur, atque idipsum idcirco, quod ita omnia phænomena, quæ ad nostram notitiam pervenerunt, optime explicentur, & alia plurima prædicantur in posterum cum successu, quod quidem omnium optimum est pro vera quavis sententia argumentum. Sed hæc innuisse sit satis, & quæcumque dixero imposterum, quin immo etiam ipsæ voces, quas adhibebo, cum communi hujus temporis philosophorum inventis, ac vocibus ad ea exprimenda adhibitis apprime consentient.

Figura Telluris homogeneæ quiescentis sphærica.

13. Porro si Tellus quiescat, sive gravitas dirigatur ad centrum, in quavis ratione mutetur ipsa gravitas mutatis distantiis, sive ad se invicem tendant omnia materiæ

riæ puncta in ratione quacumque directa vel reciproca distantiarum sit autem homogenea; erit omnino in æquilibrio. Nam ob bina quævis hemisphæria prorsus æqualia, & similia, punctum quodvis materiæ, ubicumque positum sit, dirigetur ad centrum etiam in Newtonianæ gravitatis hypothesi, & in distantiis a centro æqualibus æqualiter gravitabit. Quare quodvis punctum in superficie collocatum dirigetur per rectam perpendicularem superficiei; in sphæra enim rectæ omnes, quæ a superficie ad centrum tendunt, ipsi superficiei perpendiculares sunt; acceptis autem æqualibus canalium cruribus in centro coeuntibus cum quacumque directione adveniant, pondus totius cruris erit semper idem, & centrum æqualiter urgebitur, ac binæ fluidi columnæ suo se pondere invicem sustinebunt.

14. Nam ex vi quidem inertiæ pergent quiescere, si semel quieverint, nisi quidpiam eas particulas ad motum sollicitet; nihil autem erit, quod id quidem præstet, cum concipiamus nihil aliud agere præter gravitatis vim, ac ipsa vis gravitatis nisus ibi exerceat contrarios, & æquales, qui proinde se mutuo elident. Porro si in eo æquilibrio constituta sit Tellus, dum tota concipiatur fluida, tum repente quævis ejus pars concrescat; manebit figura, cum nihil sit, quod soliditate illa adjecta reliquas particulas fluidas ad motum sollicitet. Et quidem in casu, in quo gravitas a mutua particularum actione non pendeat, sed dirigatur ad certum centrum, manebit figura etiam, ubi id, quod concrevit, addensetur ubilibet eque hinc, & inde a centro, cum ea addensatio reliquas partes fluidas nihil afficiat, nec ad motum sollicitet.

Itidem ex æquilibrio canalium.

15. Et hæc quidem est notissima demonstratio sphæricitatis Telluris immotæ ex æquilibrio usurpata jam olim ab Archimede, tum ab aliis passim, sed hic a negativo argumento ad positivum traducta, & vero etiam confirmata magis, atque extensa. Porro ea vim habet etiam, ubi Tellus feratur motu uniformi, & parallelo, in quo qui-

Determinatio & demonstratio eadem, si Tellus moveatur motu uniformi parallelo.

quidem motu particulæ omnes pergent moveri uniformiter in directum æqualiter, cum nihil ſit, quod novum motum cum priore conjungendum producat, adeoque diſtantiam a ſe invicem reſpectivam nequaquam mutabunt, ſine qua mutatione mutatio figuræ nulla fit. Ejuſmodi autem fere eſt annuus Telluris motus, qui motu fere parallelo fit, quanquam exiguum diſcrimen a paralleliſmo in motu annuo exiguam quandam aberrationem pariat, de qua fortaſſe aliquid alibi infra.

Inveſtigatio figuræ, gravitate utcumque tendente ad datum centrum, & Tellure mota circa proprium axem.

16. Interea dicendum, quid debeat conſequi, ubi diurna vertigine Tellus circa proprium axem convertatur, gravitas autem tendat ad datum centrum in ratione diſtantiarum quacumque, vel lege quavis conſtante, quæ a ſolis diſtantiis pendeat. Primum autem præmitti debet illud, quod eſt notiſſimum, in quovis circulari motu corpus vi inertiæ conari abire per tangentem, in quo conatu exercetur ſimul niſus quidam recedendi a centro, qui dicitur vis centrifuga. Bina de eadem vi centrifuga proponam lemmata, tum ad figuræ terreſtris determinationem gradum faciam.

Lemma virium centralium elementare.

17. Lemma 1. *Ejuſmodi vis in circulis eodem tempore deſcriptis eſt proportionalis eorundem circulorum radiis.* Eſt theorema notiſſimum ab Hugenio olim propoſitum, & demonſtratum paſſim in elementis Mechanicæ.

Alterum inde deductum. Tab. 4, F. 1.

18. Lemma 2. *Si quadrans circuli* IMD *in fig. 1. tab. 4. convertatur circa radium* CD, *& vim centrifugam in* I *exprimat* IH, *vim centrifugam in* M, *qua recedit a centro motus* P *ſecundum directionem* PM, *exprimat recta* MO, *quæ vis reſolvatur in* ON *normalem ipſi* CM *productæ, & in* MN *ſecundum directionem ejuſdem* CM; *erit vis centrifuga in* I *ſecundum directionem* CI *ad vim centrifugam in* M *ſecundum directionem* CM, *ut* CM^2 *ad* MP^2. Eſt enim per lemma 1, ut *IC*, ſive *CM* ad *MP*, ita *HI* ad *MO*, & ob triangula *CMP*, *ONM* rectangula ſimilia, iterum ut *CM* ad *MP*, ita *MO* ad *MN*, adeoque compoſitis rationibus CM^2 ad MP^2, ut *IH* ad *MN*.

19. Hiſce

19. Hisce præmissis deveniemus jam ad generalem determinationem curvæ ope canalium. Sit in eadem fig. 1 *FCE* quadrans sectionis Telluris factæ per axem, cujus axis dimidium *CE*, & circa quem axem convertatur ipsa Tellus, quæ tota fluida concipiatur. Sint autem ibidem bini canales, *CF* perpendicularis axi in plano æquatoris, & *CL* utcumque inclinatus. Ut habeatur æquilibrium debet centrum *C* æque urgeri ab utroque ita, ut pondera eorundem canalium æqualia sint. Conditio problematis.

20. Exprimant ordinatæ *KQ* ad curvam *VQG*, quamcumque, vim gravitatis pro quavis distantia *CK* assumpta in semidiametro æquatoris *CF*. Assumpta autem *RF*, quæ sit ad *VF*, qua exprimitur gravitas in æquatore in *F*, ut est vis centrifuga ibidem ad gravitatem ipsam, & facto semicirculo *RBF*, ducatur in eo chorda *RB* parallela *CL*, tum *Br* perpendicularis ad *RF*, ac *rC*, & assumpta *CK* æquali *CL*, rectæ ex *K*, & *I* parallelæ *FV* occurrant lineæ *VG* in *Q*, & *A*, rectæ *CR* in *S*, ac *T*, rectæ *Cr* in *s*, ac *t*. Curva exprimens legem gravitatis cum rectis definientibus vires centrifugas.

21. In primis debet *It* exprimere vim centrifugam in *M* redactam ad directionem *CM*. Est enim per num. 17 vis centrifuga absoluta in *F* ad ejusmodi vim in *I*, ut *FC* ad *CI*, sive ut *FR* ad *IT*. Est autem per num. 18 ea vis absoluta in I ad vim relativam in *M*, ut CM^2 ad MP^2, nimirum ob similia triangula *CPM*, *FBR*, quæ angulos habent æquales in *C*, & *R* ad *CL*, *RB* parallelas, ut FR^2 ad FB^2, sive, ob *FR*, *FB*, *Fr* in semicirculo continue proportionales, ut *FR* ad *Fr*, vel demum ut *IT* ad *It*. Quare cum *FR* exprimat vim centrifugam absolutam in *F*, exprimet *IT* vim eandem absolutam in *I*, ac *It* vim relativam in *M*. Demonstratio eorum, quæ pertinent ad virium cētrifugarum expressionem per eas rectas.

22. Hinc autem vis residua in *M*, sive excessus gravitatis supra vim centrifugam ibidem, exprimetur per *At*, vis autem residua in *I* per *AT*; ac proinde totum pondus canalis *CL* exprimetur per totam aream *QsCG*, totum autem pondus canalis *CF* exprimetur per aream *VRCG*, & Areæ exprimentes pondera canalium, & earum æqualitas ex æquilibrio.

 ob

ob æqualitatem eorum ponderum, areæ quoque illæ æquales erunt.

Curva curvæ virium quadratrix ad ſolutionem neceſſaria. Tab. 4., F. 1. 2.

23. Ea æqualitas per curvarum quadraturas ſic obtinebitur. Maneant in fig. 2 reliqua omnia, quæ in prima, a CF verſus V, & curva Cqu, jacens ad partes oppoſitas vitandæ confuſionis gratia, ſit quadratrix curvæ GQV relatæ ad CF, ut nimirum Fu æquetur areæ $VFCG$, applicatæ ad CF, & itidem Kq, Ia areæ $QKCG$, $AICG$ ſimiliter applicatæ ad eandem CF.

Inventio generalis puncti ad curvam in quavis recta e centro ducta.

24. Hujuſmodi curvâ ſemel præparatâ, ducatur in fig. 1 in quovis angulo recta indefinita Cl, & in fig. 2 fiat angulus FRB æqualis angulo ECl fig. 1, ac demiſſa Br perpendiculari ad FR, ſumantur uV', uX verſus F dimidiæ FR, Fr, & in quavis qK, aI ſumantur qZ, aY verſus KI, quæ ad uX ſint, ut quadratum CK, CI ad quadratum CF, & curvæ CYX ea lege conſtructæ occurrat in Z recta $V'Z$ parallela FC, ducaturque ZK parallela FV. Si jam in fig. 1 in recta Cl ſumatur CL æqualis huic CK figuræ 2, dico punctum illud L fore ad curvam quæſitam.

Demonſtratio ejuſdem.

25. Cum enim in fig. 2 triangula RCF, rCF æquentur dimidiis rectangulis ſub CF, & RF, ac CF, & rF, eadem applicata ad CF æquabuntur dimidiæ RF, rF, ſive rectæ $V'u$, Xu. Cumque & triangula rFC, sKC, ob ſimilitudinem, & rectæ Xu, Zq, per conſtructionem ſint, ut quadrata CF, CK, etiam triangulum sKC ad eandem CF applicatū æquabitur rectæ Zq. Hinc reſiduæ areæ $VRCG$, $QsCG$ applicatæ ad ipſam CF æquabuntur rectis reſiduis $F'V$, KZ, quæ cum æquales ſint, erunt æquales & areæ $VRCG$, $QsCG$, adeoque in fig. 1 pondera CF, CL æquabuntur, & habebitur æquilibrium, ut oportebat.

Determinatio ſemidiametri æquatoris, ſemiaxis, & eorum differentiæ.

26. Si directio Cl fig. 1 abeat in CF evaneſcente angulo FCl, adeoque & RFB fig. 2; abibit B, & r in R, adeoque X, & Z in V', & K in F, nimirum L in F in fig. 1, ut oportebat. Sed abeunte in fig. 1 Cl in CE, abit in fig. 2 B, & r in F, ac proinde X in u, & curva $CYZX$ in $Caqu$, ac ſine nova conſtructione curvæ CYZ recta $V'Z'$ parallela FC

oc-

occurrens primæ curvæ Cau in Z' determinabit VZ', vel FK' differentiam semiaxis a semidiametro æquatoris.

27. Hanc ego quidem hujus problematis constructionem exhibui in dissertatione de figura Telluris ann. 1739. Sed ea plurimum contrahitur, si promoveatur analysis geometrica, & investigetur relatio rectæ CL fig. 1 non ad angulum ECl, sed ad ordinatam LY perpendicularem axi CE. Constructa nimirum in fig. 2 sola quadratrice Cqu, & assumpta quavis CK, quæ debeat esse æqualis cuidam CL figuræ primæ ductæ in quodam angulo ECl ibidem adhuc ignoto, ducatur sua QKq in fig. 2, & concipiatur in utraque figura angulus FRB, qui debeat esse æqualis illi ECl fig. 1, utcumque adhuc ignoto. Ducta Br, & sua Csr, debebit area $QsCG$ æqualis esse areæ $VRCG$ ob æquilibrium. Capta jam uV' versus F æquali dimidiæ FR, ductaque illa $V'Z$, quæ occurrat Kq in Z, facile deprehenditur fore Zq æqualem areæ trianguli sKC applicatæ ad CF. Nam Fu per constructionem, & $V'u$ (dimidia RF) ex natura trianguli æquantur areis $VFCG$, RFC applicatis ad eandem CF, adeoque FV', areæ $VRCG$ similiter applicatæ. Cumque & KZ æquetur FV', & area $QsCG$ areæ $VRCG$, erit KZ æqualis areæ $QsCG$, adeoque Zq æqualis areæ sKC applicatæ ad CF.

Constructionis simplicioris prima semina per analysim geometricam.

28. Jam vero in figura 1 erit CF^2 ad CK^2, ut area RFC ad aream SKC, & CK^2, sive CL^2 ad LY^2, ut RF^2 ad FB^2 ob triangula rectangula LYC, FBR similia, adeoque ut RF ad Fr, sive ut SK ad Ks, vel ut triangulum SKC ad sKC. Quare erit ex æqualitate ordinata CF^2 ad LY^2, ut area trianguli RFC ad aream sKC, sive ob applicationem in fig. 2 ad eandem CF, ut in ea $V'u$ ad Zq, & CF in fig. 1 ad LY in ratione subduplicata $V'u$ ad Zq fig. 2.

Finis analyseos geometricæ.

29. Inde igitur multo facilior constructio. Data curva VQG, construatur ejus quadratrix uqC sola, & assumpta uV' versus F dimidia FR, ducatur recta $V'Z$ parallela FC, donec occurrat rectæ Qq in Z. Capiatur jam in fig. 1 recta Cl' versus F, quæ sit ad CF in ratione subduplicata rectæ Zq ad $V'u$ fig. 2, ac ducta indefinita $l'Li'$

Constructio ex ea analysi.

normali ad CF, centro C, intervallo illius CK assumptæ in fig. 2 inveniatur in ipsa $I'i'$ punctum L, quod erit ad curvam quæsitam. Nam erit CI' æqualis LY, & habebunt CL, LY inventam relationem ad se invicem.

Determinatio semidiametri æquatoris, & semiaxis.

30. Patet autem curvam ejusmodi ducere originem ex F. Nam abeunte in fig. 2 K in F, abit Zq in $V'u$, & ratio ea evadit æqualitatis, adeoque in fig. 1 evadit CL æqualis CI', & punctum L una cum I' abit in F. Si autem $V'Z$ fig. 2 occurrat quadratrici Cqu in Z', ducaturque $Z'K'$ perpendicularis ad CF, erit huic CK' æqualis semiaxis CE fig. 1. Nam abeunte in fig. 2 K in K' evanescit Zq, abeuntibus punctis Z, q in Z'. Quare ibi in fig. 1 evanescit CI', sive LY, ac angulus LCY, facto FCL recto, & abeunte CL in CE.

Determinatio casuum omnium pertinentium ad distantias majores, minores, & intermedias.

31. In locis K intermediis inter F, & K' fig. 2 habebitur semper in fig. 1 duplex punctum L hinc, & inde a recta CF in distantia æquali, cum circulus radio C intervallo CK debeat occurrere bis rectæ $I'i'$ hinc, & inde ab I' ad eandem distantiam, nisi forte alicubi in fig. 2 ratio subduplicata Zq ad $V'u$ fuerit eadem, ac CK ad CF, vel ipsâ major. Primo enim casu evaderet in fig. 1 CI' æqualis CK, & puncto utroque L abeunte in I', curva ibi ad rectam CF appelleret; in secundo vero casu esset CI' major, quam CK, & recta centro C, intervallo illo CK non pertingeret ad $I'i'$, quæ recta idcirco in infinitum producta curvæ nusquam occurreret. Quare tota ea curva hinc, & inde a CF erit sibi similis, & æqualis. Abeunte K in figura 2 infra K', jam KQ abjens in Ia erit minor ob aream decrescentem versus C, quam K'Z', sive Iy, in quam abibit ibi KZ. Quare Zq mutabit directionem in ya, & proinde negativa fiet, ac idcirco quadratum rectæ LY fig. 1, quod ob $V'u$, & CF fig. 2 constantes est ibi, ut Zq, evadet negativum, & ipsa ordinata fig. 1 imaginaria, adeoque curva non descendet ad distantiam minorem ipsâ CE fig. 1. Supra F vero pro varia indole curvæ GQV, & ejus quadratricis Cqu fig. 2, varias habere poterit vices, sed semper continuata quadratrice Cqu, & recta yZV' supra $V'u$ habebuntur pro quovis puncto rectæ CF productæ bina

bina puncta curvæ æquilibrii hinc,& inde æquè remota ab ipsa CF, vel unicum, curvâ utrinque ad eam appellente, vel nullum, prout in fig. 2 ratio subduplicata rectæ Zq ad datam $V'u$ fuerit minor, æqualis, vel major respectu rationis CK ad CF.

32. In omnibus autem hisce casibus patet, pro omni arcu curvæ positæ infra C fore figuram semper compressam in polo E, & polo ipsi opposito, & differentiam semiaxis CE a semidiametro æquatoris CF fore æqualem illi $V'Z'$ figuræ 2, quæ ab ipsa quadratrice definitur, & cujus expressionem generalem videbimus paullo infra.

Generalis compressio figuræ ad polos & compressionis quantitas definita.

33. Ubi gravitas primitiva sit in aliqua ratione directa distantiarum, curva VQA figuræ 1, & 2 terminatur in C, & quadratrix aqu prodit ex C, quæ quidem prodit itidem ex C, quotiescumque curva gravitatis VQA terminatur ad rectam CG, alicubi in G. Si gravitas sit in aliqua ratione distantiarum reciproca, curva VQA abit in infinitum, & rectam CG habet pro asymptoto. Tum vero si gravitas, dum ad centrum acceditur in infinitum, crescat, infinities minus, quam in ratione reciproca simplici distantiarum, area asymptotica erit finita, & adhuc quadratrix aqu prodibit e C.

Casus, in quibus quadratrix potest ortum ducere e centro.

34. Quod si gravitas crescat in ratione eadem distantiarum simplici reciproca, vel adhuc magis, areæ ejusmodi erunt infinitæ, nec poterit quadratrix prodire e C. In eo casu oportet in fig. 2 quadratricem inchoare e quovis puncto I rectæ CF ita, ut ordinatæ superiores Kq jacentes ad partes u exprimant areas $QKIA$ jacentes supra ordinatam IA, & ordinatæ inferiores jacentes ad partem oppositam exprimant areas positas infra ipsam IA. Ipsa autem quadratrix uqa, & vero etiam XZY ex ea parte abibit itidem in infinitum, & habebit CG pro asymptoto. Constructio tamen eadem ope quadratricis ejusdem, unius juxta posteriorem solutionem, vel duplicis juxta priorem, exhibebit constructionem problematis, quæ invenietur semper, habita ratione transformationis locorum Geometricorum, cujus leges fusius aliquanto, & dili-

Casus, in quibus ea asymptotica est: ei tamen aptari posse constructionem eandem.

diligentius perſecutus ſum ſuperiore anno in diſſertatione adjecta ſectionum Conicarum elementis Elementorum meorum tomo tertio.

De curvis exprimentibus legem gravitatis, ubi ea ſit accuratè, ut aliqua potentia diſtantiarum directè, vel reciprocè.

35. Quod ſi gravitas VQA ſit accurate in aliqua ratione directa vel reciproca diſtantiarum, ſive, ut quævis poteſtas m diſtantiæ; erit curva VQA ſemper ex familia parabolarum, ſi m fuerit numerus poſitivus, & gravitas in ratione directa diſtantiarum; ex familia vero hyperbolarum, ſi fuerit m numerus negativus, & gravitas in ratione diſtantiarum reciproca, præter caſum in quo $m = 0$, & $m = 1$, qui ſunt bini caſus gravitatis conſtantis, & gravitatis creſcentis in ratione diſtantiarum directa, de quibus paullo infra, in quorum altero curva VQA abit in rectam parallelam FC, in altero in rectam tendentem ab V ad C.

Earum quadratrices.

36. In eo caſu, in quo ordinata IA eſt, ut CI^m, area terminata per eandem ordinatam generaliter eſt ad rectangulum ſub CI, & IA, ut 1 ad $m + 1$, quod quidem etiam per ſimplicem Geometriam demonſtrari poteſt, & pertinet ad elementa Geometriæ infiniteſimalis, & curvarum, quæ brevi in quarto elementorum meorum tomo, ut ſpero, prodibunt. Hinc erit ea area, $\frac{1}{m+1} \times CI \times IA$, & proinde Ia, quæ ipſi proportionalis eſt, erit ut $CI \times IA$, ſive ut CI^{m+1}, & ſemper in iis caſibus quadratrix uqa erit itidem ex familia parabolarum, vel hyperbolarum, præter caſum, quo ſit $m = 0$, nimirum gravitas conſtans, quo caſu $m + 1 = 1$, ac uqa evadit recta tendens ad F, & caſum, quo $m = -1$, quo nimirum gravitas eſt in ratione reciproca diſtantiarum, quo quidem caſu curva VQA evadit Hyperbola Apolloloniana, & ejus area quadrari non poteſt, niſi per logarithmos.

Ratio diametri æquatoris ad ſemiaxem in iis caſibus generaliter expreſſa.

37. Hinc facile determinatur pro hoc caſu generaliter quantitas compreſſionis. Erit enim $K'C^{m+1}$ ad FC^{m+1}, ut $K'Z'$, ſive FV' ad Fu, adeoque ſi inter FV', & Fu capiatur numerus m mediarum geometricè proportionalium, quarum poſtrema ſit FX, erit $K'C$ ad FC, ut FX ad Fu, cum debeat itidem eſſe FV' ad Fu, ut FX^{m+1} ad

Fu

Fu^{m+1}. Quod ſi præterea $V'u$ fuerit exigua reſpectu Fu, differentiæ illarum continuè proportionalium erunt quamproximè æquales inter ſe, adeoque $Xu = \frac{1}{m+1} V'u$, nimirum ob $V'u = \frac{1}{2} FR$ erit $Xu = \frac{1}{2m+2} FR$. Quoniam autem erit area tota $\frac{1}{m+1} \times FC \times FV$, adeoque ipſa applicata ad FC, ſive $Fu = \frac{1}{m+1} FV$; erit Fu ad uX, ſive FC ad FK' ut $\frac{1}{m+1} FV$ ad $\frac{1}{2m+2} \times FR$, ſive ut FV ad $\frac{1}{2} FR$. Nimirum erit ſemidiameter æquatoris ad ejus differentiam a ſemiaxe, ut eſt gravitas primitiva ſub æquatore ad dimidiam vim centrifugam ibidem.

Eadem generalius, & ratio decrementi diſtãtiæ ab æquatore ad polum.

38. Id autem theorema eſt generale pro compreſſione exigua in quavis hypotheſi gravitatis tendentis ad datum centrum, & præterea habetur hoc aliud: decrementum diſtantiæ ab æquatore ad polum eſt proximè, ut quadratum ſinus recti latitudinis, ſive ut ſinus verſus latitudinis duplicatæ. Utrumque demonſtratur facile in fig. 2. Cum enim area $VRCG$ debeat eſſe æqualis areæ $QsCG$, dempta $QSCG$, & addita $RSsr$, erit $VrsQ = RrC$. Si autem ſit FR exigua reſpectu FV, erit area $VrsQ$ proximè æqualis areæ $VFKQ$, & ipſi accuratè æqualis erit, ubi abeunte K in K', abit r in F. Poterit autem area $VFKQ$ conſiderari, ut rectangulum ſub KF, & FV, & triangula RCF, KCr ſunt æqualia $\frac{1}{2} RF \times FC$, $\frac{1}{2} Rr \times FC$. Quare abeunte K in K' erit $\frac{1}{2} RF \times FC = FK' \times FV$, & FC ad FK', ut FV ad $\frac{1}{2} FR$, quod erat primum. Erit autem generaliter $FK \times FV = \frac{1}{2} Rr \times FC$, adeoque FK decrementum diſtantiæ, ut Rr, qui eſt ſinus verſus arcus RB, cujus dimidium metitur angulum RFB, ſive angulum FCL figuræ primæ, qui eſt proximè diſtantia loci ab æquatore, ſeu latitudo, & conſtat ex Trigonometria, eſſe ſinum verſum arcus cujuſvis, ut quadratum chordæ, cujus dimidium eſt ſinus rectus arcus dimidii; unde patet, & ſecundum.

Binæ leges gravitatis jam olim ſeorſum pertractatæ, & hic iterum pertractandæ.

39. Hæc quidem hìc generaliſſime e ſublimioribus principiis derivantur. Verum in ea diſſertatione de Figura Telluris, cujus memini ſupra num. 27, conformes priori conſtructioni generali hìc propoſitæ a n. 19 jam tum præmiſeram binas conſtructiones pro binis caſibus gravitatis

tatis constantis, & gravitatis crescentis in ratione simplici distantiarum, quarum priorem Galileus consideravit, & vero in hac investigatione Hugenius; posteriorem vero consideravit Hermannus, & pro utroque deduxeram æquationes ad curvam, quarum prior cum Hugeniana congruit, posterior Ellipsim Apollonianam exhibet, quam Hermannus ipse in eo casu invenerat. Eas concinnatas aliquanto elegantius, ut nimirum ex generali illa deducantur, hìc proponam prius, tum elegantiores, simplicioresque alias deducam ex hac nova. Proderit ad Geometriæ contemplationem quandam jucundissimam, alia ex aliis deducere ordine illo, quem ipsa Geometria ex rerum natura derivatum sponte objicit, & ostentat.

Constructio facilior pro casu gravitatis constantis deducta ex generali. Tab. 4, F. 2.

40. Si gravitas fuerit constans, qualem Galileus assumpsit in omni sua Mechanica, & Hugenius in hac perquisitione, constructio illa prima generalis, qnam hìc proposui a num. 19 evadit multo expeditior. In eo casu evadit in fig. 2 *Fu* æqualis *FV*, & *Cau* recta linea, *CYX* parabola Apolloniana, cujus *CG* diameter, *Cu* tangens; & latus rectum ejus diametri tertium post *uX*, *Cu*. Nam *VQAG* esset recta parallela *FC*, & rectangulum *VFCG* applicatum ad *CF* esset ipsa *FV*, areæ autem pertinentes ad abscissas *CK*, *CI*, ut ipsæ, adeoque & *Kq*, *Ia*, ut *CK*, *CI*; & *qZ*, *aY* ad *uX*, quæ sunt ut quadrata *CK*, *CI*, essent ut quadrata abscissarum *Cq*, *Ca*, quorum primum est proprium rectæ, secundum ejus parabolæ. In primis autem differentia semiaxis a semidiametro æquatoris nimirum $V'Z'$ perquam facile inveniretur. Esset enim *CF* ad $V'Z'$, ut *Fu* ad uV', sive assumptis æqualibus, ut *FV* ad $\frac{1}{2}$ *FR*, nimirum ut gravitas ad dimidiam vim centrifugam sub æquatore. Deinde & cætera omnia curvæ puncta determinari possent per Geometriam etiam planam, cum per planam Geometriam habeatur concursus rectæ cujusvis cum data quavis sectione conica.

Alia facilior peculiaris pro ipsa Tab. 4, F. 3

41. Sed sine ulla consideratione parabolæ sic multo facilius rem in ea simplicissima hypothesi expedire licet. Assumptis in fig. 3 rectis *FV*, *FR*, ut prius, facto semicircu-

circulo *FBR*, & ducta *RB* parallela cuicunque *Cl*, ut prius, ac demisso perpendiculo *Br*, compleatur rectangulum *VFCG*, ducaturque *Gr*, cui recta *RX* parallela *FC* occurrat in X. Occurrat autem recta *GV* rectæ ductæ per *C*, & *r* in *T*, & rectæ per *X* parallelæ *FV* in *Y'*, ac assumpta *TQ* media geometricè proportionali inter *TV*, *TY'*, capiatur *CL* æqualis *GQ*, eritque *L* ad curvam quæsitam.

42. Nam erit *Rr* ad *r V*, ut RX sive *VY'*, ad *VG*, sive *FC*. Quare in triangulis *RCr*, *VY'r* bases *Rr*, *rV*, & altitudines *FC*, *VY'* reciprocantur, ac proinde areæ æquales sunt. Est autem triangulum *TY'r*, ad *TVr*, ut *TY'* ad *TV* ob altitudinem *r* communem, sive in ratione duplicata *TQ* ad *TV* ob *TY'*, *TQ*, *TV* continue proportionales, vel (recta *QK* parallela *VF* occurrente rectis *CR*, *Cr* in *S*, *s*) ut triangulum *TQs* ad idem illud triangulum *TVr* ob eorundem triangulorum similitudinem. Quare triangula *TY'r*, *TQs*, quæ ad idem triangulum *TVr* eandem rationem habent, sunt inter se æqualia, & dempto communi *TVr*, remanebit trapezium *VrsQ* æquale triangulo *VrY'*, adeoque triangulo *RCr*, ac dempto communi trapezio *RSsr*, & addito communi *QSCG*, erit area *VRCG*, qua exprimitur pondus *CF*, æqualis areæ *QsCG*, qua exprimitur pondus *CL*, ut oportebat. Constructionis demonstratio.

43. Abeunte *CL* in *CE*, abit punctum *B*, & *r* in *F*, & *T* in infinitum, ac ratio *VQ* ad *QY'*, quæ est eadem, ac *TV* ad *TQ*, evadit ratio æqualitatis. Cum vero sit semper *VG* ad *VY'*, sive ad *RX*, ut *Vr* ad *rR*, abeunte eo casu *r* in *F*, ea ratio fiet *VF* ad *RF*, sive ratio gravitatis ad vim centrifugam. Quare *GV* ad *VQ*, sive *CF* ad *FK* dimidiam *RX*, nimirum semidiameter æquatoris ad differentiam ipsius a semiaxe erit, ut gravitas *VF* ad dimidiam vim centrifugam *RF*, ut etiam supra num. 27. Determinatio compressionis.

44. Quoniam ea vis centrifuga respectu gravitatis est perquam exigua, ut paullo inferius videbimus, semper erit *FR* admodum exigua respectu *FV*, & punctum *T* remotis- Determinatio decrementi distantiæ, & incrementi gravi-

tatis ab æquatore ad polum. motissimum, ac VQ proxime dimidia VY, sive RX. Ipsa autem RX, quæ ad Rr habebit rationem VG, ad Vr fere eandem, ac est VG ad VR, erit ad sensum, ut Rr, qui est sinus versus arcus RB, cujus arcus dimidium metitur angulum RFB æqualem angulo FCL, sive proxime latitudini loci, ac est, ut quadratum RB, qui, habita RF pro radio, est sinus anguli RFB, sive proxime latitudinis. In eadem vero hypothesi cum ob RF exiguam haberi possint RS, VG pro parallelis, erit Qs proxime æqualis Vr, & Rr excessus gravitatis residuæ Qs debitæ loco L, supra gravitatem residuam debitam æquatori F. Hinc etiam in hac gravitatis hypothesi habetur hujusmodi theorema. *Distantiarum a centro, & gravitatis, quam experimur, differentiæ sunt proxime, ut sinus versi latitudinis duplicatæ, vel in ratione duplicata sinus latitudinis.*

Casus gravitatis directè proportionalis distantiæ. Tab. 4, F. 1, 2

45. Quod si gravitas sit, directè ut distantia a centro, linea VQG figuræ 1, abibit in rectam tendentem ab V ad C. Evanescet enim recta CG, & erit IA, ut CI. Eo casu, & quadratrix Cau figuræ 2, & CYX evadunt parabolæ Apollonianæ, quarum axis communis recta GC producta, tangens vero CF. Erit enim in ratione duplicata CI tam Ia, quam aY, adeoque & IY, quo casu itidem punctum Z potest definiri per Geometriam planam. Sed eo itidem casu constructio evadit simplicior sine ulla sectionum conicarum consideratione, & fit hoc pacto.

Constructio pro eo casu, & demonstratio. Tab. 4, F. 4.

46. In fig. 4 manentibus reliquis, ut prius, ducatur ex V recta VC, & ex R recta ipsi parallalla, quæ occurrat Cr in P, tum PO parallela RF, ac assumpta CK media geometricè proportionali inter CO, CF, capiatur CL æqualis CK, & punctum L erit ad curvam æquilibrii quæsitam. Erit enim triangulum VrC ad VRC, ut Vr ad VR, ut Cr ad CP, ut CF ad CO, in ratione duplicata CF ad CK, sive Cr ad Cs, vel ejusdem trianguli VrC ad QsC. Quare triangulum VRC, quod exprimit pondus CF, erit æquale triangulo QsC, quod exprimit pondus CL.

47. Quo-

47. Quoniam autem etiam hìc est CF ad FO, ut Cr ad rP, sive ut Vr ad Rr, nimirum abeunte CL in CE, & r, B in F, ut VF ad RF, nimirum ut gravitas sub æquatore ad vim centrifugam ibidem, & ob FR exiguam respectu FV, est FK ad sensum æqualis KO; habebitur hìc proximè, quod in Hugeniana curva habetur accurate, ut nimirum sit gravitas sub æquatore ad dimidiam vim centrifugam ibidem, ut est diameter æquatoris ad ejus differentiam a semiaxe, & proinde utraque ad sensum æque comprimitur.

Determinatio cōpressionis eadem, ac in gravitate constanti.

48. Cum vero sit Vr ad Rr, ut Cr ad rP, ut CF ad FO, ac alternando Vr (proxime constans) ad CF (constantem), ut Rr ad FO, erit ipsa FO, & FK ejus dimidia proxime, ut Rr; ac si RP occurrat QS in i, erit is differentia gravitatis VR a gravitate Qs proxime dimidia Rr. Quare etiam hìc tam decrementa distantiarum a centro, quam incrementa gravitatis ab æquatore ad polum erunt proximè, ut sinus versus latitudinis duplicatæ, vel in ratione duplicata sinus recti ejusdem latitudinis.

Eadem pariter decrementa distantiæ, & incrementa gravitatis.

49. Præterea cum æqualia sint triangula VCR, QCs, eorum bases VR, Qs debent esse reciprocè, ut altitudines CF, CK. Quare cum illæ exprimant gravitates residuas, hæ distantias CF, CL, in quibus eæ residuæ gravitates habentur, gravitates residuæ erunt accuratè in superficie ejus solidi in ratione reciproca distantiarum a centro, quod sane mirum videri possit, cum gravitates primitivæ ibidem sint in ratione directa distantiarum earundem.

Gravitates residuæ in ratione reciproca distātiarū, cum primitivæ sint in directa.

50. Curva in hoc posteriore casu est ipsa Ellipsis Apolloniana, & in priore est illa ipsa, quam Hugenius definivit. Hoc posterius sine calculo demonstrari non potest, cum per æquationem analyticam Hugenius ejus curvæ naturam nobis prodiderit. Illud primum posset quidem etiam per synthesim, & puram Geometriam, etiam ex hac prima veteri constructione, sed ambitu multo majore, & complicatiore. Quamobrem primo

Quid per geometriam, quid per calculū tractandum infra.

quidem hìc per analyticas formulas utrumque præstabimus, tum ex secunda constructione simpliciore constructiones eruemus pro utraque hac lege, pro prima quidem itidem admodum simpliciorem, pro secunda vero multo aptiorem ad demonstrandum per simplicem Geometriam, haberi ibi accuratè ellipsim Apollonianam.

Æquatio pro gravitate constanti. Tab. 4, F. 3

51. Ponatur pro primo casu in fig. 3 $CF = a$, ductaque LY perpendiculari ad axem CE, sit $CY = x$, $LY = y$, gravitas FV constans $= m$, vis centrifuga in F, sive $FR = n$. Erit $CL^2 = x^2 + y^2$. $LY^2 = y^2 :: FR^2 . FB^2 :: FR = n . Fr = \frac{ny^2}{x^2 + y^2}$. Rursus $FC^2 = a^2 . CK^2 = CL^2 = x^2 + y^2 :: CFr = \frac{1}{2} \times \frac{nay^2}{x^2 + y^2} . CKs = \frac{ny^2}{2a}$. Cumque sit $CKQG = CK \times FV = m\ (xx + yy)$, erit $QsCG = m\ (xx + yy) - \frac{ny^2}{2a}$. Est autem $GVFC = ma$, $RCF = \frac{1}{2}na$, adeoque $GVRC = ma - \frac{1}{2}na$. Quare, ob areas $VRCG$, $QsCG$ æquales, erit $m\,(xx + yy) - \frac{ny^2}{2a} = ma - \frac{1}{2}\,na$. Ea æquatio reducta, posito $\frac{ma}{n} = f$, exhibet eam æquationem, quam Hugenius invenit $y^4 + (4af - 4ff - 2aa)\ yy - 4ffxx + 4aaff - 4a^3f + a^4 = 0$.

Æquatio pro gravitate distantiis directè proportionali. Tab. 4, F. 4

52. Pro secundo casu ponantur reliqua in fig. 4, ut prius, ac sit m gravitas non quidem constans, sed quæ debetur distantiæ CF, eritque, ut prius $CKS = \frac{ny^2}{2a}$. Erit autem $CFV = \frac{1}{2}\,ma : CF^2 = a^2 . CK^2 = x^2 + y^2 :: CFV = \frac{1}{2}\,ma . CKQ = \frac{mx^2 + my^2}{2a}$. Quare $CsQ = \frac{mx^2 + my^2}{2a} - \frac{ny^2}{2a}$, sive posito excessu gravitatis sub æquatore supra vim centrifugam, nimirum $m - n = p$, erit $CsQ = \frac{mx^2 + py^2}{2a}$. Est autem $VR = m - n = p$, & $FC = a$. Quare $VCR = \frac{1}{2}\,ap$, adeo-

adeoque habetur æquatio ſimpliciſſima $\frac{mx^2 + py^2}{2a} = \frac{1}{2} ap$, ſive $\frac{m}{p} x^2 + y^2 = a^2$, quæ eſt ad Ellipſim, cujus ſemiaxis tranſverſus $CF = a$, conjugatus autem ad tranſverſum in ratione ſubduplicata p ad m, cum nimirum facta $y = o$, abeat x in ipſum, & ſit $\frac{mx^2}{p} = a^2$, adeoque $p . m :: x^2 . a^2$.

53. Data quavis alia lege gravitatis, æquatio ad curvam facile itidem invenitur in figura 1, dummodo detur quadratura curvæ VQG, exprimentis legem ipſam. Nam demendo ab area $QKCG$, quæ dabitur per ejuſmodi quadraturam, triangulum KsC, cujus valor eſt idem, ac is, quem in ſuperioribus numeris invenimus, habebitur area $QsCG$, & ablato itidem ab area $VFCG$ triangulo RFC, habebitur area $VRCG$, quæ poſita æqualis priori exhibet æquationem ad curvam. Porro, ubi gravitas ſit in ratione diſtantiarum utcumque multiplicata per numerum rationalem quemcumque poſitivum, vel negativum, ſemper habetur algebraica quadratura curvæ exprimentis eam legem, præter unicum caſum vis decreſcentis in ratione reciproca ſimplici, in quo caſu curva ipſa, quæ generaliter pertinet ad familiam parabolarum, vel hyperbolarum ſublimiorum, ut ſupra vidimus, abit in hyperbolam Apollonianam, & quadratur tantummodo per logarithmos, adeoque in omnibus ejuſmodi caſibus algebraica erit curva æquilibrii, & in hoc poſtremo pertinebit ad logarithmos. Methodus eam inveniendi pro alia lege quavis Tab. 4, F. 1

54. Hæc quidem ex prima illa veteri conſtructione deducuntur expoſita a num. 19. Nunc ex illa multo ſimpliciori poſita a num. 27, hoc pacto pro iis binis caſibus conſtructio multo elegantior derivatur. Sit in fig. 5 gravitas conſtans expoſita per rectas KQ perpendiculares FC terminatas ad rectam VG eidem parallelam. Aſſumpta VV' verſus F in ratione dimidiæ vis centrifugæ in æquatore in F ad gravitatem illam conſtantem, ducatur $V'Z$ parallela FC, quæ occurrat KQ in Z, recta vero VC occurrat rectis Conſtructio pro gravitate conſtanti facilior. Tab. 4, F. 5

VZ,

VZ, QK in Z', q, & fiat $Z'i$ media geometrice proportionalis inter $Z'Z$, $Z'V'$ verſus V': tum ducatur recta Vi, quæ rectæ FC occurrat in I', & per I' ducta $I'i'$ parallela CE, centro C intervallo CK, inveniatur in ea punctum L ex utravis parte puncti I, quod erit ad curvam quæſitam.

Demonſtratio ipſius. Tab. 4, F. 1 2 4

55. Erunt enim FV, & VV' eædem, ac in fig. 2 Fu, uV', recta vero CV erit quadratrix rectæ VG, cum area $VFCG$ applicata ad CF reddat FV, & area $QKCG$ ad $VFCG$ ſit ut KC ad FC, ſive ut qK ad VF, ac proinde & qK æquetur areæ $QKCG$ applicatæ ad CF. Erunt igitur puncta ZZ' eadem, ac in fig. 2, & ſumenda erit CI' ad CF in ratione ſubduplicata, ut in fig. 1 rectæ qZ ad uV' figuræ 2 juxta num. 29, ita hìc ad VV' hujus ipſius, ſive rectæ $Z'Z$ ad $Z'V'$. Id autem eſt præſtitum, ſumpta $Z'i$ media inter $Z'Z$, & $Z'V'$, & ducta ViI'. Eſt enim $Z'i$ ad $Z'V$ in ratione illa ſubduplicata $Z'Z$ ad $Z'V$, & CI' ad CF, ut $Z'i$ ad $Z'V'$.

Conſtructio pro gravitate diſtãtiis proportionali. Tab. 4, F. 6

56. Pro caſu ſecundo vis creſcentis in ratione diſtantiarum ſimplici conſtructio eſt aliquanto magis compoſita, ſed non ita multum. Sumatur in fig. 6 FV ad arbitrium, tum Fu ejus dimidia, & uV' verſus F ad uF in ratione vis centrifugæ ad gravitatem in F, ac ducta quavis KQ, parallela FV, quæ occurrat rectis CV, Cu in Q, Q', capiatur in ea Kq tertia poſt Fu, KQ', verſus Q, & capiatur CI' verſus F ac CF in ratione ſubduplicata qZ ad uV', & ducta $I'i'$ perpendiculari ad CF, punctum L inventum in ea centro C intervallo CK erit ad curvam quæſitam.

Ejus demonſtratio.

57. Nam exprimente FV gravitatem in F, exprimet KQ gravitatem in K, cum ſit KQ ad FV, ut CK ad CF in ſimplici diſtantiarum ratione, adeoque recta VC locus virium. Cum autem ſit Fu dimidia FV, æquabitur areæ VFC applicatæ ad FC. Igitur cum ſit Fu ad Kq, ut uF^2 ad QK^2, ut VF^2 ad QK^2, ut area VCF ad aream QCK, erit & Kq æqualis areæ QKC applicatæ ad CF, adeoque q ad quadratricem. Quare debuit fieri CI' ad CF, in ratione ſubduplicata Zq ad $V'u$, uti factum eſt.

58. Por-

58. Porro quadratrix uqC erit Parabola Apolloniana, cujus axis recta EC producta, tangens autem CF, cum nimirum quævis ejus ordinata KQ' debeat esse, ut area QKC, sive ut quadratum CK. Invenietur autem $V'Z'$ ab V' ad concursum rectæ $V'Z$ cum ipsa sine ulla ejus consideratione. Ibi enim debebit esse $K'Z'$ æqualis FV', & KC^2 ad CF^2, ut $K'Z'$ ad Fu. Quare si capta Ft media geometricè proportionali inter FV', Fu, capiatur CK' ad CF, ut Ft ad Fu, habebitur punctum K'. Erit enim $K'C^2$ ad CF^2, ut FV' ad Fu, ut oportebat.

Determinatio compressionis.

59. Quoniam autem si $V'u$ sit satis exigua, debent $V't$, tu ad sensum æquales esse, habebitur etiam hinc hoc theorema: *Differentia semiaxis, & semidiametri æquatoris ad semidiametrum ipsam erit proximè, ut dimidia vis centrifuga sub æquatore ad gravitatem ibi*. Id autem theorema in casu gravitatis Galileanæ constantis erit verum accuratè. Cum enim sit hìc CK' ad CF, ut Ft ad Fu, erit dividendo FK' ad CF, ut ut ad Fu, est autem uV' ad Fu, ut ea vis centrifuga ad eam gravitatem, & ut proximè dimidia $V'u$. In figura autem 5, est $V'Z'$ ad FC, ut VV' ad EV, quæ ratio ibi ex constructione est eadem, ac dimidiæ vis centrifugæ ad gravitatem. Quæ quidem omnia congruunt cum iis, quæ a num. 33 generaliter sunt dicta.

Theorema pro ipsa congruens cum theoremate casus prioris. Tab. 4, F. 6 5

60. Porro jam hinc sine ullo calculi subsidio invenitur, curvam FLE in posteriore casu gravitatis crescentis in ratione directa distantiarum esse ellipsim Apollonianam. Sumatur enim Ce æqualis, & contraria CE, & demittatur ordinata LY ipsi CE normalis. Quoniam FK' est differentia CE, CF, erit CK' æqualis CE; sunt autem ipsarum CK', CK, vel CL, & CF quadratis proportionales rectæ $K'Z'$, sive KZ, vel FV', Kq, & Fu. Est igitur differentia quadratorum CF, CE ad differentiam CF, CL, ut $V'u$ ad Zq, sive per constructionem ut FC^2 ad $l'C^2$. Et alternando $CF^2 - CE^2$ ad FC^2, ut $CL^2 - CE^2$. $l'C^2$, vel invertendo $FC^2 . CF^2 - CE^2 :: l'C^2 . CL^2 - CE^2$, ac per conversionem rationis $FC^2 . CE^2 :: l'C^2 . l'C^2 - CL^2 + CE^2$. Est autem

Curvam in casu posteriore esse accuratè ellipsim. Tab. 4, F. 6

autem $-CL^2 + I'C^2$ idem, ac $-I'L^2$. Quare demum erit quadratum CF ad quadratum CE, uti quadratum CI', sive YL ad differentiam quadratorum CE, CY, sive ad rectangulum eYE, quæ est natura Ellipseos Apollonianæ habentis pro semiaxe transverso CF, pro conjugato CE.

Plura, quæ possent demonstrari per Geometriam. Quid per calculum hic præstandum.

61. Ex eadem generali constructione posset itidem per puram Geometriam demonstrari & illud, in superficie hujus figuræ gravitatem compositam ex vi centrifuga, & gravitate primitiva dirigi per normalem, immo etiam posset per solam Geometriam ex hypothesi ejus directionis deveniri ad costructionem curvæ, sed res aliquanto esset longior, & minus necessaria, juxta ea, quæ diximus num. 8. Quoniam tamen id ipsum admodum facile præstari potest ope calculi infinitesimalis admodum elementaris, & methodo, qua in illa ipsa mea dissertatione usus fueram, ac inde profluit illa ipsa secunda constructio numeri 29; idcirco hic eam subjiciam.

Ratio solvendi problema per directionem gravitatis perpendicularem superficiei. Tab. 4. Fig. 7.

62. Exprimat in fig. 7 LN gravitatem primitivam directam ad centrum C, LO vim centrifugam, & completo parallelogrammo $MOLN$, dirigentur gravia per LM ad punctum P semidiametri CF, non ad centrum C, & ipsa LP erit normalis ad curvam FLE. Problema igitur expedietur per formulam subnormalium. Ducta nimirum LI' perpendiculari ad CF, erit PI' subnormalis, quæ ex formulis elementaribus calculi infinitesimalis, posita, ut prius, $CY = I'L = x : LY = CI' = y$, debet esse $\frac{-xdx}{dy}$.

Æquatio ex integratione cum constanti addita.

63. Ponatur, ut prius, $CF = a$, ac vis centrifuga in $F = n$, ponatur itidem CL, sive $\sqrt{(xx + yy)} = z$, & gravitas LN in distantia CL fiat $= u$, quæ dabitur per distantiam z. Erit per num. 17 $CF = a$. $LY = y :: n$. $LO = NM = \frac{ny}{a}$. Rursus $LN = u$. $MN = \frac{ny}{a} :: LC = z$. $CP = \frac{nyz}{au}$. Quare $PI' = y - \frac{nyz}{au} = \frac{-xdx}{dy}$, sive $ydy -$

nzydy

$\frac{nzydy}{au} = - xdx$, sive $ydy + xdx = \frac{nzydy}{au}$. Porro cum sit $zz = xx + yy$, est $zdz = xdx + ydy$. Erit igitur $zdz = \frac{nzydy}{au}$, & $audz = nydy$, sive demum integrando $aS.udz = \frac{1}{2} nyy + B$ addita constanti, quam natura ipsa problematis determinabit.

64. Nam in fig. 2 CK est ipsa hæc distantia z, & vis u ipsi respondens est KQ. Quare area $GCKQ = S.udz$. Quoniam Kq posita est æqualis huic areæ applicatæ ad $CF = a$, si ipsa KQ dicatur r, erit area illa $= ar$, & æquatio $aar = \frac{1}{2} nyy + B$. Ponatur $Fu = c$, & cum abeunte in fig. 1 puncto L in F, abeat, & CL, & YL in F, fiet ibi tam z, quam $y = a$, ac in fig.2 abibit K in F, & Kq in Fu. sive r in c. Fiet igitur ibi æquatio $aac = \frac{1}{2} naa + B$, & $B = aac - \frac{1}{2} uan$, ac æquatio ad curvam $aar = \frac{1}{2} nyy + aac - \frac{1}{2} aan$, sive $yy = aa \times \frac{r - c + \frac{1}{2} n}{\frac{1}{2} n}$. Determinatio constantis, & æquatio integra. Tab. 4, F. 1 2

65. Inde autem eruitur hæc expeditissima constructio curvæ quæsitæ. Construatur in figura 2 sola quadratrix Cqu, & sine illis rectis CR, Cr, & semicirculo RBF abscindatur uV' versus F dimidia FR. Tum ex quovis puncto K ducta Kq ordinata quadratricis ducatur $V'y$ parallela FC, donec ipsi Kq occurrat alicubi in Z. In fig. 1 capiatur CI', quæ sit ad CF in ratione subduplicata rectæ Zq ad Vu fig.2, tum ducta ex I' recta $I'i'$ indefinita, centro C intervallo rectæ CK assumptæ in fig. 2 inveniatur in recta $I'i'$ fig. 1 punctum L, quod erit ad curvam quæsitam. Erit enim in fig.2 $KZ = FV' = c - \frac{1}{2} n$. Quare $qZ = q$K$-$ K$Z = r - c + \frac{1}{2} n$, adeoque $V'u = \frac{1}{2} n$. $Zq = r - c + \frac{1}{2} n :: CF^2 = aa$. $I'C^2 = yy = aa \times \frac{r - c + \frac{1}{2} n}{\frac{1}{2} n}$, cui valori cum in fig. 1 sit accepta æqualis CI', patet constructionem rite procedere. Constructio deducta ex ea analysi.

66. Atque hæc quidem est illa ipsa constructio, quam ex æquilibrio canalium per puram geometriam obtinuimus Ejus consensus cum posteriore geometrica. Qua

ratione computari possit compressio.

mus num. 29, quæ conspirat cum priore numero 32, ex quibus, & Hugeniana æquatio, & Hermanniana Ellipsis derivantur, quæ idcirco etiam hìc derivarentur. Superest, ut videamus, quanta esset in hisce gravitatis hypothesibus elevatio ad æquatorem, quod quidem obtinebitur ex num 37., si innotescat ratio vis centrifugæ sub æquatore ad vim gravitatis ibidem, & tota semidiameter æquatoris saltem veræ proxima. Licet enim ea non penitus accurate cognoscatur, adhuc tamen in exigua differentia axium curvæ error inde ortus erit & ipse perquam exiguus.

Quo pacto investigāda ratio vis centrifugæ ad gravitatem.

67. Ratio vis centrifugæ sub æquatore ad gravitatem ibidem magis immediate determinatur nunc, posteaquam sub ipso æquatore immediatis observationibus per oscillationes pendulorum definitus est effectus gravitatis ibidem. Hugenius, ac Newtonus pluribus reductionibus indiguerunt ad rem perficiendam, adhibitis pendulorum oscillationibus definitis in Europa, procul ab æquatore. Adhuc tamen cum reductio ipsa exigua sit, nihil ad sensum errarunt in ejusmodi determinatione. Porro primo quidem videndum est, quantum spatium percurreret dato tempusculo grave, quod sine ulla aeris resistentia libere caderet vi suæ gravitatis sub æquatore, tum vero, qui sit ibidem effectus vis centrifugæ. Alterum exhibet longitudo penduli oscillantis ad singula secunda horaria temporis medii, alterum magnitudo Telluris utcumque cognita, & celeritas motus diurni.

Determinatio gravitatis sub æquatore e pendulis ibi oscillantibus.

68. Quod ad primum attinet, Bouguerius e suis observationibus habitis sub æquatore, quæ intra arctissimos limites cohærent cum observationibus Condaminii, & Goudinii, adhibita correctione e calore, & ex aeris gravitate, deduxit longitudinem penduli oscillantis in superficie maris, in vacuo, sub æquatore ita, ut singulis secundis horariis singulas accuratè oscillationes perficiat, pedum 3, lin. 7. $\frac{21}{100}$, sive linearum 439. 21. Est autem ex primis Mechanicæ elementis, quadratum diametri

metri ad quadratum semicircumferentiæ, sive 226×226, ad 355×355, ut dupla penduli longitudo ad spatium, quod libero descensu percurreretur tempore unius oscillationis. Id spatium inito calculo invenitur linearum 2167.41, sive pedum 15 lin. 7.41.

69. Spatium, quod exprimit effectum vis centrifugæ, est quamproximè sinus versus arcus descripti uno minuto secundo temporis, sive arcus 15″. Dolendum sane, quod non habeamus æquatoris gradum certo, & immediate definitum, quem ob irregularem textum Telluris fortasse nunquam satis certo habebimus nec ex observatione, nec ex theoria. At quoniam eo ex quavis theoria assumpto error, qui in ipso committi potest, in sinu verso per quam exiguo, per quam exiguum errorem secum trahit, utar gradu æquatoris, quem ex sua Bouguerius theoria deduxit hexapedarum 57264.

70. Assumpto eo gradu æquatoris, arcus secundorum 15 continebit lineas 206150. Factis igitur, ut diameter 2000000000 ad sinum 15″, nimirum 72722, ita is arcus 15″, nimirum 206150 ad sinum versum, is remanet 7.49. Is quidem esset sinus versus, si Terra converteretur circa proprium axem 24 horis Solaribus, Sed cum ejus diurna conversio absolvatur citius fere 4 minutis, quibus dies sidereus Solari die est brevior, arcus descriptus in æquatore motu diurno erit major proxime in ratione inversa horarum 24, sive minutorum 1440. ad 1436. vel 360 ad 359. Sunt autem sinus versi in ratione duplicata chordarum, adeoque & exiguorum arcuum. Quare factis, ut quadratum numeri 359 ad quadratum 360, sive proxime ut 358 ad 360, ita 7.49 ad quartum, prodit sinus versus quæsitus linearum 7.53.

71. Erit igitur vis centrifuga sub æquatore ad gravitatem residuam ibidem, ut est numerus 7.53 ad 2167.41, sive proximè ut 1 ad 288, ac eadem ad gravitatem integram, ut 1 ad 289, quod consentit cum Hugenii, & Newtoni determinatione. Si gradus æquatoris fuerit major Ratio illa definita utrumque.

major, vel minor, in eadem ratione duplicata major, vel minor erit ſinus verſus arcus ſimilis, adeoque & vis centrifuga, & proinde in eadem ratione duplicata minuendus erit poſterior proportionis numerus.

Abſoluta magnitudo elevationis æquatoris milliariorum ſepté.

72. Hinc autem in quavis hypotheſi gravitatis, directæ ad unicum centrum, ſi vis centrifuga ſit ſatis exigua erit ſemidiameter æquatoris ad ſemiaxem, ut 289 ad 288, ſive differentia ipſorum $\frac{1}{577}$ totius. Id autem calculo initio pro invenienda ſemidiametro æquatoris proximè ex gradu aſſumpto, quæ eſt circiter milliariorum 4300, exhibet differentiam exiguam ſane milliariorum proximè 7.

In aliis hypotheſibus poſſe eſſe utcumque diverſam.
Tab. 4, F. 2

73. In omnibus hiſce hypotheſibus gravitatis figura Telluris quieſcentis debet eſſe ſphærica, figura Telluris circumactæ circa proprium axem debet eſſe compreſſa ad polos, & ſi vis centrifuga ſit ſatis exigua reſpectu gravitatis ſub æquatore compreſſio debet eſſe, quam definivimus, ut elevatio ſub æquatore ſit ad ejus ſemidiametrum in ea ratione, in qua eſt dimidium vis centrifugæ ſub ipſo æquatore ad gravitatem ibidem. Et decrementum diſtantiarum ab æquatore ad polos erit, ut quadratum ſinus latitudinis. Eſſe autem vim centrifugam ſatis exiguam requirit illud, ut *FK'*, quæ per ipſam ita definitur, ſit ſatis exigua, ut area *VFKQ* in fig. 2 ubique, etiam abeunte *K* in *K'* poſſit aſſumi pro rectangulo, ſive ut demiſſa *VD* perpendiculari in *KQ*, ſit trilineum *VQD* admodum exiguum reſpectu areæ *VFKD*. Id quidem pendet a natura curvæ virium *VQG*. Poſſet enim ea eſſe ejuſmodi, ut exiſtente *FR* perquam exigua reſpectu *FV*, & *FK'* reſpectu *FC*, adhuc id trilineum eſſet non ita exiguum reſpectu *VFKD*.

Problematis admodum generalis ſolutio.

74. Et quidem poſſet ſolvi hujuſmodi problema. Invenire legem virium directarum ad centrum unicum, ita ut compreſſio ſub æquatore ſit magnitudinis datæ cujuſcumque, & decrementum diſtantiæ ab æquatore ſit in ratione quacunque, licet vis centrifuga ad gravitatem ſub æquatore

tore ſit in ratione quacumque. Aſſumpta enim Fu, & uV' utcunque in ratione dimidiæ vis centrifugæ ad gravitatem ſub æquatore, tum $F'K'$ magnitudinis cujuſcumque, & ducta $K'Z'$ parallela Fu, donec occurat recte $V'y$, parallelæ FC in Z', ſi ducatur per puncta $CZ'u$ curva, quæcunque, in qua ordinatæ eo majores ſint, quo magis recedunt a C, tum fiat curva VdG cujus quadratrix ſit $uZ'C$, quod qua ratione fieri generaliter poſſit per puram Geometriam infiniteſimalem oſtendam in quarto elementorum meorum tomo, habebitur lex virium expreſſa per ejuſmodi curvam VQG, quæ exhibeat compreſſionem datam FK'. Aſſumpta autem FR ad FV, ut $2uV'$ ad uF, facto quovis angulo FRB, & ductis Br, Cr, aſſumatur quodvis decrementum FK diſtantiæ CK applicandæ in eo angulo FRB, ac fiat $uX = \frac{1}{2} Fr$, tum ducta KZ parallela Fu aſſumatur Zq ad Xu in ratione duplicata CK ad CF, habebitur determinatio totius arcus $Z'qu$ quadratricis, ac per eam arcus curvæ virium, quæ ea decrementa diſtantiarum præſtet pro iis angulis, ut ſatis patet regreſſu facto per primam conſtructionem expoſitam a num. 32.

Tranſitus ad alias hypotheſes. Si gravitas conſtans feratur ad duo centra, & Terra quieſcat, æquilibrium in figura elliptica. Tab. 4, F. 8

75. Et hæc quidem ſatis jam ſint de iis, quæ pertinent ad legem virium tendentium ad unicum centrum ita, ut in eadem circumquaque diſtantia a centro vires ipſæ æquales ſint, mutatis vero diſtantiis mutentur utcumque. Videbimus de eodem virium genere alia quædam etiam inferius, ut illud, poſſe inveniri ejuſmodi legem virium directarum ad idem centrum, ut non decrementa diſtantiarum, ſed incrementa gravitatis reſiduæ ab æquatore ad polos ſint in quacumque ratione data. Sed hic faciemus gradum ad alias gravitatis leges, & primo loco proponam hypotheſim notiſſimam illam quidem, & admodum ſimplicem, ac elegantem, in qua Telluris vel quieſcentis, vel motæ haberi poteſt etiam productio ad polos ipſos. Dirigatur nimirum gravitas in fig. 8 ad bina puncta E, & F ita, ut ex binis æqualibus gravitatibus componatur, quarum utraque ſit conſtans, & ad idem ſemper

pun-

punctum dirigatur. Si fluidum componatur in figuram ellipseos *ABD* habentis ea puncta pro focis, & axem transversum *AD*, semiaxem conjugatum *CB*, ac quiescat; erit in æquilibrio. Nam in quovis puncto *G*, gravitas composita ex binis *GH*, *GI* dirigetur per *GK* diametrum rhombi *GHKI*, quæ diameter secat bifariam angulum *HGI*, sive *EGF*, adeoque perpendicularis est ad superficiem, quod requiritur ad æquilibrium. Porro in *D*, & *A* gravitas composita æquabitur summæ illarum duarum gravitatum; in quovis puncto *G*, diameter *GK* erit minor binis lateribus *GI*, *GH*, cum sit minor binis *GI*, *IK*. Et quidem eo minor erit iis, ut patet, & admodum facile demonstratur, quo angulus *HGI* est major, qui quidem in ellipsi eo est major, quo punctum *G* magis accedit ad *B*. Habebitur igitur in hac gravitatis hypothesi Telluris etiam quiescentis productio ad polos, & tamen gravitas in polis maxima, in æquatore minima, ac a polis ad æquatorem perpetuo decrescens.

Quomodo ibi habeatur æquilibrium etiam canalium.

76. Id quidem mirum videri posset, cum videatur debere maior vis gravitatis, & pondus in *D*, quam in *B* compensari per minorem altitudinem canalis *CD*. Sed ratio discriminis est manifesta. Nam in canali *BC* omnia puncta aliquam gravitatis vim habent versus *C* compositam ex illis binis, utut illæ obliquæ sint, quæ quidem, crescente in accessu ad *C* obliquitate, & oppositione virium, ut demum in *C* sint prorsus contrariæ, decrescit in infinitum; sed semper est aliqua. Contra vero in *FD* quidem gravitas tendens directione *DC* composita ex illis binis est utique semper constans usque ad *F*, sed in *FC* actionibus contrariis elisa nulla jam est, & haud difficulter demonstrari potest summam illam totâ summâ *DF* esse majorem.

Quid ibi, si fluidum gyret circa suum axem.

77. Si jam id solidum gyret circa axem *AD*, patet, ob vim centrifugam in *CB*, debere ibi pondus minui per totum canalem, & proinde amitti æquilibrium; quod

quod quidem recuperari non poterit, nisi assurgente, vel affuso liquore ad B, donec compensetur detrimentum acceptum a vi centrifuga, Quod si rotationis celeritas fuerit exigua; figura remanebit adhuc producta, parum assurgente B, sed crescente rotatione, quantum est opus, adeoque & vi centrifuga, poterit ad æquilibrium requiri vel æqualitas CB cum CD, vel etiam excessus.

78. Ingeniosa est itidem methodus Mairanii, & multo magis generalis, qua docet, quo pacto haberi possit, vel quiescentis Telluris, vel motæ figura utcumque vel compressa ad polos, vel producta. Sit curva $FGHI$ in fig. 9. constans 4 arcubus similibus, & similiter positis circa centrum C, cui convexitatem obvertant, ac ejus evolutione generetur curva $ABDE$ ita, ut filum advolutum arcui GKF, & procurrens secundnm ejus tangentem ex F in A, dum evolvitur, generet arcum ALB, tum advolutum arcui GH generet arcum DB, ac eodem pacto evolutione arcus HI generetur DE, & advolutione arcus IF generetur EA. Si jam fluidum quoddam conformetur in figuram $ABDE$, ac ejusmodi gravitate polleat, ut ea in quavis positione LK fili advoluti, vel evoluti dirigatur secundum ejus directionem ad punctum illud K, in quo ea evolutam contingit; habebitur directio ubicunque in L perpendicularis superficiei. Est enim proprietas generalis curvarum, quæ generantur evolutione aliarum, ut filum, quod evolvitur, evolutam semper contingat, & genitæ perdendiculare sit.

Mairanii lex gravitatis tendentis per tāgentes evolutæ. Tab. 4, F. 9

79. Habebitur igitur in eo fluido hoc æquilibrii genus; & si præterea intensitas gravitatis ejusmodi fuerit in partibus internis, , ut æqualitas ponderum non turbetur in canalibus communicantibus; habebitur omne æquilibrii genus in ejusmodi fluido.

Æquilibrium directionis perpendicularis superficiei in eo casu.

80. Porro facile demonstratur, fore AD longiorem quam EB. Quod si jam gyret id fluidum circa BE habebitur compressio ad polos, quæ crescet magis ob vim centrifu-

Quid si id fluidum gyret.

trifugam. Si vero gyret circa *DA* habebitur in polis *AD* vel productio, utut minor, quam prius, vel æqualis elevatio, vel etiam compressio, pro diverso gradu velocitatis, qua rotatur, & vis centrifugæ inde ortæ.

Non eas gravitatis leges in natura existere, sed Newtonianã.

81. Hæc quidem de hisce hypothesibus dicta sufficiant selecta ex aliis plurimis, quæ proferri poterant. Et quidem gravitatem non dirigi ad certum centrum, nec vero ad duo puncta, satis jam constat ex gravitate illa generali, qua omnia cœlestia corpora in se invicem gravitant in ratione reciproca duplicata distantiarum vel accurate, vel saltem proximè, qua Newtonus Cœlum ipsum Physicis patefecit, & ex qua una tam multa phænomena pendent, ac per eam ita explicantur, ut iis etiam, quæ in futurum prædicuntur phænomenis satis fiat. Porro ex ea colligitur per analogiam, omnes materiæ particulas in se invicem gravitare vi quadam mutua, quam ego quidem nusquam esse arbitror accurate in ratione reciproca duplicata distantiarum, ut etiam exposui nuper in dissertatione de lege virium in natura existentium, sed quæ in majoribus distantiis ita ad eam rationem accedit, ut nullum sensibile discrimen deprehendi possit, ac sensu percipi.

Preterea in prioribus compressio, & differentia gravitatis nimis exigua

82. Accedit, quod in prioribus illis hypothesibus gravitatis proportionalis cujuspiam distantiarum potestati & compressio figuræ est nimis exigua, qua nimirum multo majorem præ se ferunt dimensiones graduum, ut 2. capite hujus opusculi videbimus; ut etiam in gravitate constanti haberetur nimis exiguum discrimen gravitatis sub æquatore a gravitate in regionibus borealioribus, quod multo majus pendulorum oscillationes indicant.

Nec illam Mairanii ad figuram determinandam habere usum.

83. Postrema etiam illa Mairanii theoria satis quidem explicat directionem gravitatis primitivæ, nimirum a vi centrifuga non mulctatæ, quæ non dirigitur ad centrum, sed ad curvam quandam; verum directio ipsa non ab illa curva pendet, nec certam quandam curvam respi-

respicit, sed mutata partium dispositione, quæ accelerato, vel retardato diurno motu mutaretur omnino, mutaret curvam ipsam, per cujus tangentes dirigeretur, ut adeo ex ejusmodi curva, utique non data ante figuræ determinationem, sed pendente a determinatione ipsa, non liceat ad ipsam ejusmodi determinationem devenire.

Investigatio figuræ in hypothesi gravitatis Newtonianæ. Solutio Mac-Laurini illustranda.

84. Quamobrem investigabo jam figuram Telluris motu diurno revolutæ circa proprium axem in hypothesi gravitatis Newtonianæ, ubi solutionem a Mac-Laurino propositam in dissertatione de causa physica fluxus, & refluxus Maris, quæ anno 1740 præmio donata est cum aliis tribus a Parisiensi Academia, conabor hìc primum illustrare, & per Geometriam solam, quæ maxime scitu digna sunt evolvam, adjectis nonnullis, mutatis aliis, ut res feret. Ac primo quidem præmittam nonnulla, quæ ad ipsam solutionem sunt necessaria.

Theorema pertinens ad binas ellipses similes, & similiter positas. Tab. 4. Fig. 10 11

85. Sint in fig. 10, & 11 *PBIb* binæ Ellipses similes, & habentes centrum *C* commune, ac communem positionem axium homologorum. Si *NVn* sit ordinata interioris Ellipseos ad axem *Dd*, & *IDP* perpendicularis Axi *Dd* occurrat Ellipsi exteriori in *IP*, jungantur *DN*, *Dn*, hisque parallelæ *PM*, *Pm* occurrant Ellipsi exteriori in *M*, & *m*, ducatur *PH* parallela axi *Dd*, in quam sint perpendiculares *MQ*, & *mq*; summa rectarum *PQ*, *Pq* in fig. 1, in qua puncta *M*, *m* jacent ad easdem partes rectæ *PI*, vel differentia in fig. 2., in qua jacent ad partes oppositas, æquabitur duplæ *DV*.

Initium demonstrationis.

86. Sit enim chorda *HE* parallela *Pm*, & concipiatur recta *Gg* diameter communis ordinatarum *mP*, *HE* Ellipseos exterioris, quæ erit etiam diameter chordæ *Dn* interioris; ac proinde eas chordas bifariam secabit in *T*, *F*, *L*. Secet eadem alicubi in O rectam *PH*; & triangula *TPO*, *FHO*, *LDC* erunt similia ob latera singula singulis lateribus parallela. Quare erit *PT* ad *PO*, & *HF* ad *HO*, ut *DL* ad *DC*, & capiendo in fig. 10

ſummas, in fig. 11 differentias antecedentium, & conſequentium, erit ibi quidem ſumma, hìc autem differentia rectarum PT, HF ad PH, ut LD ad DC, ſive ut nD ad dD.

Ejus demonſtrationis continuatio.

87. Quoniam autem ſemiordinata Ellipſi exteriori ex d ducta debet eſſe & parallela DP, & ipſi æqualis; ac proinde incidere in ipſum concurſum H rectæ PH cum Ellipſi exteriore, erit PH æqualis Dl. Quare erit & ſumma TP, HF in primo caſu, ac differentia in ſecundo æqualis rectæ Dn.

Ejuſdem continuatio.

88. Jam vero ob nN ſectam bifariam, & ad angulos rectos in V, angulus NDV æquatur angulo VDn, ac proinde & MPH angulo mPH, ſive alterno PHE; unde fit, ut ſi concipiatur Ellipſis revoluta circa axem axi Bb perpendicularem abeunte puncto H in locum P, & viceverſa, debeat abire PM in locum HE; ac proinde ſit ipſi æqualis, & dupla HF. Cum igitur etiam Pm ſit dupla PT, erit in primo caſu ſumma PM, Pm, in ſecundo differentia æqualis duplæ Dn.

Ejuſdem concluſio.

89. Cum demum ob ſimilia triangula mqP, MQP, nVD, habentia angulos ad P, & D æquales, ad q, Q, V rectos, ſint mP, MP ad qP, QP, ut Dn ad DV; erit etiam ſumma ipſarum Pq, PQ in primo caſu, & differentia in ſecundo æqualis duplæ DV. Q. E. D.

Ubi hoc apud Mac-Laurinum aliter demõſtratum.

90. Hoc eſt corol. 4. lem. 1. diſſertationis Mac-Laurini, in cujus gratiam lemma ipſum cum prioribus corollariis videtur præmiſſum; ſaltem hoc ſolum requiritur ad ea, quæ deinde profert. Hoc ipſum demonſtravit analyticè Calandrinus in notis appoſitis ipſi diſſertationi ad calcem partis primæ tomi 3. Commentariorum PP. Jacquier, & Le Seur in Newtoni Principia. Videtur autem hæc mea demonſtratio utiliſſimæ propoſitionis & ſimplicior, & elegentior.

Aliud lemma a Mac-Laurino propoſitum, & ejus demonſtratio.

91. Ibidem in lem. 4. Mac-Laurinus demonſtrat gravitatem corpuſculi ſiti in vertice pyramidum, vel conorum ſimilium, & homogeneorum compoſitam ex gravitate

vitate in singulas particulas proportionali massis directè, & quadratis distantiarum reciproce esse, ut sunt longitudines ipsarum pyramidum, vel conorum, vel ut quævis latera homologa. Facilis est demonstratio. Si enim dividantur binæ ejusmodi pyramides, vel coni in æqualem numerum particularum similium, & similiter positarum, erunt singularum particularum massæ, ut massæ totarum, sive ut cubi laterum homologorum, & distantiæ a vertice, ut quadrata eorundem. Quare gravitas puncti in singulas ejusmodi particulas erit in ratione composita ex directa triplicata, & reciproca duplicata laterum homologorum, nimirum ex simplici directa eorundem.

92. Hinc corol. 1, eruit, gravitatem in punctis similiter sitis omnium solidorum homogeneorum, & similium esse, ut latera homologa. Cum nimirum possint ea solida dividi in æqualem numerum ejusmodi pyramidum. Consectarium ipsius.

93. At corol. 2. eruit corpusculum situm intra orbem ellipticum, clausum binis sphæroidibus similibus, & similiter collocatis in centro, & axe utrolibet, esse in æquilibrio. Id quidem & Newtonus demonstravit, ac facile deducitur ex præcedenti, cum facile demonstretur partes pyramidum oppositarum similium per punctum ipsum transeuntium, & utrinque immersarum orbibus ipsis æquales esse inter se. Aliud itidem a Newtono etiam demonstratum.

94. Præterea si fuerint binæ sphæroides similes Ellipticæ genitæ in fig. 12 a binis ellipsibus *ADBE*, *adbe* similibus habentibus centrum commune axium *AB*, *ab* & *DE*, *de* homologorum positione, quas secet planum quodcunque *IOL* axi revolutionis *AB* non perpendiculare; binæ sectiones erunt binæ ellipses similes habentes centrum commune, & communes axium homologorum positiones. Theorema de sectione binarum ellipsium similium, & similiter positarum in centro. Tab. 4. Fig. 12.

95. Ducatur enim per axem *AB* planum *AEBD* perpendiculare plano sectionis, quod ipsi occurrat in re- Ejus demonstrationis initium.

cta IL, & patet, hanc sectionem $AEBD$ cum ipsa sphæroide fore ipsam Ellipsim genitricem. Referat, IOL, partem sectionis plani IOL jacentem, vel hinc, vel inde a recta IL, ac ducta diametro MN parallela rectæ IL, & per quodvis punctum H rectæ IL recta PQ perpendiculari ad AB, concipiatur planum ipsi $AEBD$ perpendiculare ductum per ipsam PQ, cuius intersectionem cum sphæroide, patet, fore circulum diamerro PQ, & ejus intersectionem HO cum plano IOL pariter perpendiculari eidem $IEBD$, patet, fore perpendicularem ipsi plano, ac proinde tam rectæ PQ, quam IL.

Continuatio. 96. Ex natura circuli erit rectangulum PHQ æquale quadrato HO. Ex natura Ellipseos juxta tomum tertium meorum Elementorum num. 299, erit rectangulum IHL ad rectangulum PHQ, ut rectangulum MCN ad rectangulum DCE, sive ut quadratum MC ad quadratum DC. Quare erit rectangulum IHL ad quadratum rectæ HO sibi perpendicularis, & terminatæ ad sectionem IOL in constanti ratione quadrati MC ad quadratum CD, ac proinde sectio IOL erit Ellipsis, cuius alter axium IL. Eadem ratione substitutis ubique litteris minusculis demonstratur, etiam iol esse ellipsim, cujus axis il, & rectangulum ihl ad ho^2, ut mC^2 ad Cd^2.

Conclusio ipsius. 97. Jam verò ob similem similium Ellipsium $AEBD$, $aebd$ positionem patet, diametros diametrorum MN, mn conjugatas habere eandem positionem, ac proinde suas ordinatas IL, il in eodem puncto G bifariam secare, quod iccirco erit commune centrum Ellipsium IOL, iol, in quibus si educantur semiaxes Gf, Gf perpendiculares IL, il, erunt etiam rectangula IGL, igl, sive quadrata IG, ig ad quadrata GF, Gf, ut quadrata MC, mC ad quadrata CD, Cd, quæ rationes ob similitudinem Ellipsium IOL, iol sunt æquales. Quare erunt semiaxes etiam GI, GF, & Gi, Gf in eadem ratione ad se invicem; ac proinde axes IL, il erunt vel simul transversi, vel simul coniugati, nimirum homologi, & homolomologorum axium directiones congruent $Q.E.D.$

98. Hinc primo, omnes sectiones utriuslibet solidi planis parallelis factæ sunt similes, & habent centra in eadem recta CG, & axes homologos parallelos. Patet, quia omnes IL intersectiones eorum planorum erunt parallelæ inter se, ac proinde parallelæ eidem MCN. Similitudo sectionum planis parallelis factarum.

99. Secundo erunt IL, il axes transversi, vel conjugati, prout axis conversionis AB fuerit transversus, vel conjugatus, nimirum prout sphæroides fuerint oblongæ, vel oblatæ. Nam in primo casu erunt CD, Cd semiaxes conjugati minores quibusvis semidiametris CM, Cm, in secundo transversi, & majores, ac proinde in primo casu semper GF, Gf minores, in secundo majores quam GI, Gi. Positiones axium earumdem.

100. Tertio si $AEBD$ referat potius planum æquatoris solidi, cujus axis sit ipsi plano perpendicularis, & fiat quæcunque sectio IL eidem perpendicularis; eadem in utrolibet solido erit ellipsis similis genitrici solidi ipsius, habens IL pro axe transverso, vel conjugato, prout e contrario axis conversionis fuerit axis conjugatus, vel transversus ellipseos genitricis. Nam eo casu sectio solidi facta per MN plano transeunte per axem, ac proinde perpendiculari plano æquatoris $AEBD$; erit ipsa ellipsis generans; sectio autem facta per IL ipsi parallela debet esse eidem similis per num. 98. Theorema pro sectione parallela axi, & ejus demonstratio.

101. Quarto si $AEBD$ sit quævis vel sectio per axem conversionis, vel æquator ipsi axi perpendicularis, & per verticem a axis solidi interioris, vel cujusvis ejus diametri ducatur planum priori perpendiculare, & non transiens per tangentem sectionis $aebd$ ductam per a; secabit utranque sphæroidem ita, ut idem illud punctum a, sit vertex alterius axis sectionis interioris. Sectiones per verticem axis solidi inferioris obliquæ ad ipsum.

102. Patet primum, quia plana, quæ sphæroidem interiorem tangunt in a transeunt per tangentes ductas per a, reliquis per ea puncta ductis eandem secantibus; & plana quævis ducta per puncta a, jacentia intra sphæroidem $AEBD$ ipsam necessario secant. Patet & secundum, quia in eo casu abit punctum i in a. Ejus demonstratio.

103.

Theorema pro summa virium, quibus urgetur punctum in superficie solidi elliptici ubicumque positum redactarum ad certam directionem. Tab. 4, F. 10 11

103. Jam vero sit in fig. 10, & 11 punctum P ubicunque in superficie sphæroidis elliptiticæ homogeneæ gravitans in singulas ejus æquales particulas in ratione reciproca duplicata distantiarum; & secta ipsa sphæroide per punctum P, & per axem conversionis, sit ejusmodi sectio $PBgb$, ac uterlibet ipsius sectionis axis, nimirum sive axis solidi, sive diameter æquatoris solidi ipsius, sit Bb; ducta autem PDI ipsi perpendiculari, concipiatur sphærois interior priori similis, & similiter posita ut supra, transiens per D, cujus sectio facta ab eodem illo plano sit $DNdn$. Si gravitet eodem pacto punctum D, in particulas sphæroidis internæ, & gravitates omnes in particulas singulas resolvantur in duas, quarum altera sit secundum directionem Bb, altera secundum directionem ipsi perpendicularem, summa omnium quas habet punctum P secundum directionem Bb, æquatur summæ omnium, quas habet punctum D secundum directionem eandem.

Initium demonstrationis.

104. Concipiatur enim sphærois secta per D plano perpendiculari ipsi PI; cujus intersectio cum plano illo $BIbP$ erit ipsa Bb eidem PI perpendicularis. Tum stante PDI, & rectis PQ, DV, concipiatur planum $PBIb$ circa rectam PI converti motu continuo utralibet ex parte, donec deveniat ad positionem plano $QPDV$ perpendicularem. Secabit id planum perpetuo utrunque solidum, per num. 101, & sectiones $BIbP$ erunt semper ellipses similes habentes centrum commune, & communes axium homologorum positiones, per num. 94; ac erit D vertex alterius axis Dd sectionis interioris per num. 101.

Ejusdem continuationis.

105. Sit jam frustum quodcunque solidi utriusque clausum binis ejusmodi planis, & frustum interioris secetur quotcunque binis planis DN, Dn infinite proximis, & perpendicularibus eidem plano $QPDN$, ac transeuntibus per chordas DN, Dn æquè hinc, & inde inclinatas ad axem Dd, frustum vero exterioris sphæroidis totidem planis prioribus parallelis.

106.

106. Patet ipsas DN, Dn fore & æquales inter se ob æqualem inclinationem ad axem sectionis Dd, & æquè etiam inclinatas ad rectam immotam Dd. Recta enim Nn erit perpendicularis Dd parallela PI; adeoque perpendicularis plano dDV; ac proinde per eam poterit duci planum ipsi DV perpendiculare eam secans alicubi in V, quo ductis NV, nV sint anguli NVD, nVD recti, adeoque triangula, & anguli NDV, nDV æquabuntur. Continuatio ejusdem.

107. Rectæ autem PM, Pm erunt ipsis DN, Dn parallelæ, & æquè inclinatæ ad PQ, ac illæ inclinantur ad DV; ac proinde per num. 85 erit summa, vel differentia MP, mP æqualis duplæ nD, seu ductis perpendiculis MQ, mq erit summa, vel differentia PQ, Pq æqualis duplæ DV. Adhuc continuatio.

108. Patet præterea frusta illa ipsa fore divisa eo pacto in æqualem numerum binarum pyramidum terminatarum planis parallelis, ac proinde similium, quarum longitudines DN, Dn, PM, Pm; & quarum vires secundum directiones PM, Pm, DN, Dn, compositæ ex viribus singularum particularum in puncto D, & P erunt per num. 91, ut longitudines ipsæ, quarum virium singulæ si resolvantur in binas habentes directionem DV, PQ, & ipsis perpendicularem MQ, mq, nV, NV, erunt illæ gravitates absolutæ ad eas, quæ agunt secundum directiones PQ, DV, ut illæ longitudines ad has DQ, Dq, DV, DV, & proinde gravitates sic reductæ ortæ ex pyramidibus MP, mP ad ortas ex pyramidibus DN, Dn, ut PQ, Pq ad DV, DV, sive ut summa ipsarum PQ, Pq, ubi conspirant in fig. 10, & differentia, ubi opponuntur in fig. 11, ad duplam DV; nimirum per num. 107 in ratione æqualitatis. Adhuc eadem.

109. Cum igitur idem contingat & binariis omnibus pyramidum cujusvis frusti, & frustis omnibus ortis ex motu plani circa rectam PI; summa omnium gravitatum, quas habet punctum P secundum directionem Bb æquatur summæ omnium, quas habet D secundum eandem. $Q. E. D.$ Demonstrationis conclusio.

110.

Theorema duplex pro summa virium punctorum omnium æque distantium a dato axe.

110. Hinc vero gravitas secundum directionem axis utriuslibet Bb ellipseos genitricis, quam habent puncta æqualiter distantia ab axe ipsi perpendiculari, sive, quod idem est, quæ ita sunt in recta PDI ipsi perpendiculari ubicunque in p, est æqualis, & est ad gravitatem puncti siti in B, ut CD ad CB.

Demonstratio primæ partis.

111. Si enim concipiatur tertia sphærois similis transiens per p; gravitas omnis orbis exterioris elisa fit nulla, per num. 94, at pro reliqua in eam sphæroidem redit demonstratio prior, quæ ipsam ostendit semper æqualem gravitati in D; adeoque ubique eandem. Patet igitur primum.

Demonstratio secundæ partis.

112. Quoniam autem $PBlb$, & $DNdn$ sunt corpora similia, & puncta B, D similiter posita; erunt per n. 91 eorum gravitates, ut CB, CD. Patet igitur, & secundum.

Theorema generale pro æquilibrio ex binis canalibus rectilineis quibuscumque exeuntibus e puncto quovis intra massã assumpto.

113. His præmissis, quæ ad naturum ellipseos pertinent, præmittam theorema aliud, quod pertinet generaliter ad æquilibrium in curvis quibuscumque: est autem hujusmodi. *Si in massa quadam fluida particulæ omnes ejusmodi viribus animatæ sint, ut assumpto intra eam puncto quocumque, bini quicumque canales rectilinei ducti inde ad superficiem extimam in æquilibrio sint, ea massa erit in æquilibrio.*

Tria, quæ ad id requiruntur.

114. Ut hoc theorema demonstretur oportet, demonstrare hæc tria: primo quidem canales quoscumque etiam curvilineos, vel utcumque compositos e rectilineis, & curvilineis in æquilibrio fore: secundo canalem quemvis per totam massam traductum a superficie ad superficiem, vim nullam exercere in ipsum extremum punctum: tertio vim in superficie esse perpendicularem superficiei ipsi. Primum requiritur, ne particula ulla intra massam fluidam constituta commoveri possit, summâ virium ex aliquo latere prævalente: secundum, ne particula in superficie collocata prosiliat pressionis internæ vi: tertium, ne particula in ipsa superficie pariter collocata sponte defluat, tanquam in plano inclinato.

115. Pri-

Constructio pro canalibus curvilineis, & mixtis, puncto assumpto intra massam. Tab. 4, F. 13.

115. Primum quidem demonstratur hoc pacto. Sit in fig. 13 ex *C* canalis rectilineus *CA*, tum ex quadam ejus puncto *E* exeat quicumque alius rectilineus *EM*, deinde ex hujus puncto quocumque *F* alius itidem rectilineus *FL*, ex hujus puncto *G* alius *GK*, ex hujus puncto *H* alius *HI*. Concipiatur demum ex *C* alius rectilineus *CS*.

Demonstratio æquilibrii eorum omnium.

116. Quoniam ex hypothesi omnes canales ad idem quodvis punctum terminati sunt in æquilibrio, erunt in æquilibrio *HI*, & *HK*, sive uterque eandem pressionem exercebit in *H*. Quoniam vero fluidorum pressio quaquaversum æquè diffunditur, tam pressio exercita ab *IH*, quam a *KH* æquè urgebit canalem *HG* sine ullo detrimento orto ex ea flexione. Quare addita, vel ablata actione ipsius *HG*, prout tendit ad *G*, vel ad *H*, pressio totius canalis simplicis *KG* in *G* erit æqualis pressioni canalis compositi *IHG*. Eodem argumento pressio canalis simplicis *LF* erit æqualis pressioni compositi *KGF*, adeoque, & magis compositi *IHGF*, ac demum pressio canalis rectilinei *AC*, quæ æquari debet pressioni canalis *SC*, æquabitur pressionis canalis compositi *MEC*, vel *LFEC*, vel *KGFEC*, vel *IHGFEC*. Demonstratio autem est generalis, quicumque fuerit numerus flexionum in *E*, *F*, *G*, *H*, & quæcumque flexiones fuerint, sive in eodem plano, sive in diversis, ac est etiam si is numerus augeatur in infinitum, & flexionum anguli minuantur in infinitum, atque id vel per totum tractum usque ad superficiem, vel per quotvis, & quosvis tractus. Porro in primo casu canalis desinit in curvilineum simplicis, vel duplicis curvaturæ in secundo in compositum ex quotcumque, & quibuscumque curvilineis, ac rectilineis. Quare quivis canalis vel curvilineus, vel compositus ex rectilineis, & curvilineis, erit in æquilibrio cum canali rectilineo *CS*, adeoque si bini quicumque canales rectilinei terminati ad idem quodvis punctum in æquilibrio sunt, omnes & rectilinei, & curvilinei ad idem quodvis punctum *C* terminati itidem in æquilibrio erunt, quod erat primum.

Reductio ad punctum in superficie collocatum.

117. Quod si jam concipiatur *CS* minui in infinitum, donec penitus evanescat, ejus pressio contra punctum *C* perpetuo decrescet in infinitum, ac demum evanescet: Quare & pressio canalis *AC*, vel *IHGFEC* contra punctum *C* paulatim decrescet, ac demum evanescet, unde fiet, ut abeunte puncto *C* in *S*, evanescat pressio canalis cujuscumque, vel rectilinei, vel curvilinei, adeoque punctum collocatum ubicumque in superficie in *S* nullam pressionem sentiet a quovis canali vel rectilineo, vel utcumque curvilineo, aut mixto, qua inde exeat: quod erat secundum. Patet autem id habere locum in canali etiam, qui jaceat in ipsa superficie extima, ut in canali *SRD*, ad quem nimirum ita potest accedere canalis *CEFGHI*, ut tandem in ipsum desinat.

Reductio ad directioné vis perpendicularem superficiei.

118 Sit jam, si fieri potest, in puncto superficiei *S* directio vis non *SN* perpendicularis ipsi superficiei, sed *SO*, quæ ad *SN* inclinetur in quovis angulo *NSO*. Per aliquem arcum continuum *SD* positum ad partes oppositas respectu normalis *SN* debebit ob geometricæ continuitatis legem vis dirigi per rectam inclinatam ad normalem in aliquo angulo ad easdem partes jacente, qui nimirum in distantia infinitè parva a puncto *S* infinitè parum differet ab illo *NSO*. Sit pro quovis puncto *R* ejus arcus ejusmodi directio *RP*, & vim ipsam exprimat ejus segmentum *RQ*. Ductâ *QT* perpendiculari in tangentem *RT*, vis *QT* urgebit canalis latera, vis *RT* premet fluidum inclusum canali *DRS* versus *S*. Habebitur igitur in *S* summa pressionum omnium provenientium ab ejusmodi viribus contra id, quod præcedenti numero est demonstratum. Igitur si generaliter bini canales rectilinei quicumque ducti e quovis massæ fluidæ puncto ad superficiem extimam sunt in æquilibrio, vis in quovis superficiei puncto debet dirigi perpendiculariter ad superficiem ipsam: quod erat tertium.

Quid hoc theorema præstet supra Hugenium,

119. Atque hoc pacto accuratissime demonstratum est theorema propositum, quod in hujusmodi perquisitionibus

nibus multum laboris demit, & prodest accuratæ determinationi. Hugenius, ac Newtonus contenti fuerunt canalibus ad unicum punctum terminatis, nimirum ad centrum. Mac-Laurinus canales adhibuit rectilineos generaliter terminatos ad punctum quodvis ubicumque assumptum intra massam, & hoc æquilibrii genus conjunxit cum directione vis perpendicularis superficiei, quæ duo seorsum demonstravit haberi in ellipsi a se definita. Cleurautius canalibus rectilineis adjecit curvilineos quoscumque. Posito hoc theoremate, satis erit, ad omne genus æquilibrii simul habendum demonstrare, canales quosvis terminatos ad punctum quodvis ubicumque assumptum intra massam in æquilibrio esse. Inde ea tria, quæ proposuimus, sponte fluunt; inde autem & illud facile deduci potest, quod Clerautius adhuc ad æquilibrium requirit, ut quivis canalis curvilineus intra massam in se rediens nullam usquam exerceat pressionem.

Newtonum, Mac-Laurinum, Clerautium.

120. His præmissis proponam jam theorema præcipuum, quod ipsam determinat figuram Telluris in hypothesi gravitatis Newtoniana, quin immo binas etiam alias cum ipso Mac-Laurino determinationes addam, quæ theorema multo generalius reddunt, & usui sunt, ubi agitur de maris æstu. Possem juxta numerum præcedentem, ad evincendum omne æquilibrii genus, uti solo æquilibrio canalium rectilineorum terminatorum ad idem punctum quodcumque assumptum intra massam. Verum quoniam immediata demonstratio vis in superficie perpendicularis ipsi superficiei est admodum elegans etiam ipsa, eam itidem adhibebo, ut eo magis pateant vires Geometriæ, cujus unius ope hæc omnia perfici possunt accuratissimè, & satis etiam expeditè.

Transitus ad theorema præcipuũ, quo Figura Telluris determinatur.

121. Constet jam sphærois elliptica *ABab* in fig. 14, cujus axis *Bb*, fluido homogeneo, cujus particulæ æquales gravitent in se invicem viribus in ratione reciproca duplicata distantiarum, & præterea sollicitentur aliis tribus viribus, quarum prima dirigatur ad centrum sphæ-

Theorema ipsum æquilibrii in Ellipsoide ex gravitate Newtoniana conjuncta cum aliis tribus viribus.
Tab. 4, F. 14.

roidis C, & ſit proportionalis diſtantiis CP ab ipſo centro, altera ſit perpendicularis axi ſphæroidis Bb, & proportionalis diſtantiis PK ab ipſo axe, tertia ſit parallela axi ipſi, & proportionalis diſtantiis a plano æquatoris perpendiculari ipſi axi, & ducto per centrum: & ſi ſemiaxes CB, CA ellipſeos genitricis ſint inverſe proportionales viribus totis, quæ agant in particulas æquales ſitas in extremis punctis axium A, & A, fluidum erit in æquilibrio.

Demonſtrationis binæ partes ex directione vis per normalem, & æquilibrio canalium.

122. Oſtendam autem primo juxta num. 120, vim compoſitam ex viribus omnibus agentibus in particulam poſitam in ſuperficie ſolidi agere per rectam ipſi ſuperficiei perpendicularem; tum particulam quamcunque poſitam intra ſolidum ipſum premi quaquaverſum eâdem vi per canales quoſcumque rectilineos cum quacunque directione egreſſos ex eodem puncto.

Reductio trium virium ad duas communis utrique parti.

123. Sit igitur quævis particula P ubicunque poſita vel in ſuperficie, ut figura exhibet, vel intra ſphæroidem. Si vires, quibus ea urgetur in reliquas omnes particulas reſolvantur in tres vires, quarum prima agat ſecundum directionem PD parallelam axi Bb, ſecunda ſecundum directionem PK perpendicularem ipſi axi, tertia ſecundum directionem perpendicularem plano KPD; hæ omnes tertiæ mutuo elidentur, cum planum KPD ſecet ſphæroidem in binas partes prorſus æquales, & ſimiles; ſecunda erit ad vim in a ut CD ad CA, & tertia ad vim in B, ut CK ad CB per num. 110. Pariter prima ex reliquis tribus viribus, quæ dirigebatur ad centrum per PC, & erat ipſi PC proportionalis, reſolvi poteſt in binas agentes ſecundum PD, PK ipſi proportionales. Quare vires omnes, quibus agitatur particula P, reſolvuntur ita, ut evadant binæ ex omnibus compoſitæ agentes ſecundum directiones PD, PK, quarum prior eſt ad vim in B, ut PD ab CB, ſecunda ad vim in a, ut PK ad Ca,

124. Hinc

124. Hinc erit prima ad secundam, in ratione composita ex ratione distantiarum *PD*, *PK* ab axibus *Aa*, *Bb* simplici, & duplicata eorundem axium, vel semiaxium. Nam est vis agens per *PD* in *P* ad vim in *B*, ut *PD* ad *BC*, hæc ad vim in *a*, ut *Ca* ad *CB* per hypothesim, & vis in *a* ad vim agentem in *P* per *PK*, ut *Ca* ad *KP*; ac proinde compositis rationibus omnibus, est prima vis ad ultimam, ut *PD* ad *PK*, & ut quadratum *Ca* ad quadratum *CB*. — Ratio alterius earum virium ad alteram.

125. Sit jam primò punctum *P* in superficie, ut exhibet figura, & sit *PL*, perpendicularis superficiei, quæ normalis erit ellipsi *BabA*, & ita occurret ejus axi *Bb* in *L*, ut ex notissima ellipseos proprietate elementorum meorum tomo 3 num.462 *KL* ad *KC*, ut quadratum *Ca* ad quadratum *CB*. Erit igitur vis, qua particula *P* urgetur per *PD* ad vim, qua urgetur per *PK*, ut *PD*, seu *CK* ad *PK*, & ut *KL* ad *CK* conjunctim, nimirum ut *KL* ad *PK*. Quare ipsæ *KL*, *PK* poterunt exprimere vires agentes secundum earum directionem, & vis composita ex utraque dirigitur per rectam normalem *PL*. *Q. E. D.* primò. — Demonstratio vis se dirigentis per normalem.

126. Sit secundò punctum *P* in fig. 15, & 16 intra sphæroidem ubicunque, & ducto per ipsam, & per axem sphæroidis plano *BAba*, exeat ex eodem *P* usque ad superficiem recta quævis *PQ* vel jacens in eodem illo plano, ut in fig. 15, vel extra ipsum, ut in fig. 16. Ostendendum est, eandem semper pressionem exerceri in punctum *P* a summa omnium virium particularum omnium fluidi existentium in quovis canali rectilineo *QP*. — Quid demonstrandum pro puncto intra massam: casus bini.

127. Ductis in fig. 15 per *P* chordis *Gg*, *Rr*, sectionis *BAba*, quæ erit ellipsis genitrici æqualis, parallelis ejusdem axibus *Bb*, *Aa*; concipiatur *PQ* divisa in particulas infinitesimas, quarum una *Ee*, ducanturque per *E*, & *e* chordæ *DT*, *dt* parallelæ axi *Bb* occurrentes axi *Aa* in *N*, *n*, & per *E*, ac *D* rectæ parallelæ axi *Aa* occurrentes chordæ *dt* in *V*, *I*, axi *Bb* in *L*, *F*, superficiei — Constructio pro primo casu.

in *S*, *H*,

in *S*, *H*. & ex concursu *M* rectarum *Gg*, *ES* ducatur *Mm* perpendicularis ipsi *PQ*.

Demonstrationis initium.

128. Particulæ fluidi in *Ee* urgentur binis viribus quarum altera agit secundum directionem *Bb*, sive *MP*, altera secundam directionem *Aa*, sive *EM*, & priori æqualis est per num. 110 vis, qua singulæ particulæ in *Ve* urgentur secundum primam directionem, posteriori vis, qua particulæ *EV*, vel *DI* urgentur secundum posteriorem, ob æqualem nimirum distantiam ab axibus. Resolvantur singulæ in alias binas, alteram perpendicularem rectæ *QP*, quæ punctum *P* non premit, sed latus canalis urget perpendiculariter alteram secundum directionem ejusdem *QP* agentem in *P* : & erit prior tota ad hanc ejus partem, ut *PM* ad *Pm*, sive ob similitudinem triangulorum rectangulorum *MmP*, *EVe* habentium angulos ad *Q* & *e* externum, ac internum, & oppositum æquales, ut *Ee* ad *eV*, sive ut numerus particularum in *Ee* habentium hanc partem primæ vis, ad numerum particularum in *eV* habentium vim primam totam. Igitur summa omnium partium primæ vis, quibus particulæ *Ee* urgent *P*, æquatur summæ virium in *Ve* tendentium secundum directionem *Ve*, vel *GP*. Et eodem prorsus argumento ob similitudinem triangulorum *EVe*, *EmM* summa omnium partium secundæ vis, quibus particulæ in *Ee* urgent *P*, æquatur summæ virium in *EV* tendentium secundum directionem *EL*, adeoque & summæ virium in *DI* tendentium per *DF*.

Ejusdem continuatio.

129. Porro summa virium, quibus particulæ in *DI* tendunt per *DF*, æquatur summæ virium, quibus particulæ in *dI* tendunt per *de*. Cum enim ex notissima itidem Conicarum Sectionum proprietate, Elementorum meorum tomo 3 num. 299 rectangulum *DIH* ad rectanctulum *dIt* sit, ut rectangulum *ACa*, sive quadratum *AC*, ad rectangulum *BCb*, sive quadratum *BC*; erit *DI* ad *DI*, adeoque & numerus particularum in *DI* ad numerum particularum in *d I*, ut quadratum *AC* applicatum ad *IH*, ad

ad quadratum BC applicatum ad It, nimirum ut It ad IH, & quadratum AC ad quadratum BC, vel sumptis æquipollenter dimidiis terminis primæ rationis, ut dn ad DF, & quadratum AC ad quadratum BC, nimirum juxta demonstrata num. 124, ut vis particularum in dl tendens per dn, ad vim particularum in DI tendentem per DF. Ac proinde summa omnium priorum summæ omnium posteriorum æqualis. Quamobrem summa omnium virium in Ee urgentium punctum P æquatur summæ omnium virium, quibus particulæ in Ve, & dI agunt directione de perpendiculari axi Aa.

130. Cum autem etiam vires particularum in DE, & in IV agentes secundum directionem perpendicularem axi Aa æquentur ob æqualem distantiam ab eodem; pressio puncti e facta a particulis ed æquè excedet pressionem puncti E factam a particulis ED, ac pressio illius facta a particulis eQ pressionem hujus factam a particulis EQ. Cumque id ubique contingat, & in Q utraque pressio sit nulla: oportet semper totam pressionem puncti e factam a particulis ed æquari pressioni ejusdem factæ a particulis eQ, adeoque & abeunte e in P pressio puncti P facta a particulis PG æquabitur pressioni factæ a particulis PQ. Quamobrem cum eadem sit demonstratio, ubicunque punctum Q capiatur, dummodo rectæ, & vires, quæ forte oppositas directiones habeant, habeantur pro negativis; punctum P ab omnibus canalibus rectilineis cum quacumque directione exeuntibus ex ipso in plano transeunte per axem, ut in figura 15, æquè urgebitur. Ejusdem conclusio.

131. Si verò PQ jacuerit extra ejusmodi planum, ut in figura 16; ducta, ut prius, recta GPg parallela axi sphæroidis Bb, quæ æquatori ejusdem $ANan$ occurrat in D, secetur ipsa sphærois plano QPG; secante æquatorem $ANan$ in recta Nn, quod erit perpendiculare ipsi æquatori, & sectio erit Ellipsis genetrici similis per num. 94, ac Nn erit alter ipsius axis, alterum vero Ff determi- Constructionis pars pro secundo casu.

terminabit planum per Bb ductum ipsi sectioni perpendiculare, ipsi occurrens in recta Ff parallela Bb, & transennte per punctum H in quo CH hujus plani intersectio cum Aequatore ipso perpendicularis toti sectioni ipsam æquatoris chordam Nn secat ad angulis rectos, ac proinde bifariam.

Ejusdem pars altera, & demonstratio.

132. Concipiatur jam in plano sectionis punctum P ubicunque, & captis in CB, & HF segmentis CK, HE æqualibus DP, ductisque PK, KE, EP, eædem erunt parallelæ rectis DC, CH, HD; ac proinde erit KE perpendicularis toti plano sectionis, & angulus KEP rectus erit. E binis autem viribus quibus particula P urgetur per PD, & PK hìc, ut in fig. 14, PD quidem parallela axi Bb Ellipseos genitricis aget hìc etiam intra planum sectionis, & remanebit magnitudinis ejusdem, eritque parallela axi Ff sectionis ipsius. At PK resolvetur in duas PE, EK, quarum posterior plano sectionis perpendicularis ipsum urgebit, prior PE agens intra ipsum planum erit semper parallela alteri axi sectionis Nn, eritque ad vim PK, ut PE ad PK; ac proinde cum hæc posterior in diversis distantiis puncti P ab axe Bb sit, ut distantia ab ipso, erit & illa prior in diversis distantiis puncti P ab axe Ff, ut distantia ab eo. Cum verò præterea vis per PK ad vim per PD sit coniunctim ut PK ad PD, & ut quadratum CB, ad quadratum Ca, sive ob similitudinem Ellipseos $FnfN$ cum Ellipsi genitrice $BabA$, ut quadratum HF ad quadratum Hn; erit vis per PE ad vim per PD, ut PE ad PD, & ut quadratum HC ad quadratum HN conjunctim. Quare cum ex hisce elementis demonstrata sit in fig. 15 æqualis pressio puncti P in recta quavis PQ jacente intra planum Ellipseos $BabA$ æqualis pressioni in recta PG; etiam in fig. 16 habebitur pressio in quavis recta QP, jacente intra planum Ellipseos $GnfN$ æqualis pressioni in eadem recta PG.

Conclusio pro utroque casu simul

133. Quare punctum P quaquaversus urgebitur æqualibus viribus; a particulis omnibus existentibus in quibusvis

busvis canalibus rectilineis ex ipso exeuntibus in quavis directione, & proinde per num. 113 totum fluidum in æquilibrio erit *Q. E. D.*

134. Hinc consequitur hujusmodi theorema. Vis tota, qua urgetur corpusculum situm in superficie ejusmodi sphæroidis, erit directè, ut normalis ad axem terminata, sive reciprocè, ut perpendiculum e centro demissum in rectam, quæ Ellipsim genitricem tangit in eodem puncto. Vis in superficie in qua ratione sit

135. Erit enim ex prima demonstrationis parte in fig. 14. vis tota corpusculi *P*, ut *PL* normalis. Rectangulum autem sub *PL* & perpendiculo ex *C* ducto in tangentem transeuntem per *P* æquatur quadrato semiaxis *CA*, per num. 459 tomi 3. meorum elementorum, ac proinde est *PL* reciprocè, ut ipsum perpendiculum. Demonstratio ipsius. Tab. 4, F. 14

136. Præterea inde & hujusmodi theorema consequitur. Vis tota, qua premitur, quodcunque punctum *P* intra sphæroidem situm in fig. 16 secundum quancunque directionem ad vim, qua premitur centrum est, ut rectangulum *GPg* ad quadratum *CB*, & vis, qua premitur centrum est dimidia ejus vis, quam haberet pondus columnæ *CB*, cujus particulæ æquè ubique gravitarent, ac gravitant in *B*. Quanta sit pressio in quovis puncto, quanta in centro Tab. 4, F. 16

137. Nam si concipiantur rectæ *CB*, *DG*, *DP* divisæ in æqualem numerum particularum, essent & particulæ ipsæ proportionales totis, & distantiæ particularum similiter sitarum a punctis *C*, & *D* iisdem totis proportionales. Quare & numerus particularum fluidi contentarum iisdem particulis earum linearum, & singularum vires secundum easdem rectas erunt, ut eædem rectæ totæ. Ac proinde summæ virium, quibus urgentur puncta *C*, *D* a particulis omnibus sitis in *CB*, *DG*, *DP*, erunt, ut earum quadrata. Quamobrem cum, prematur *D* a *GD* vi omni, qua premitur *P* a *GP*, & qua premitur præterea *D* a *PD*, erit vis sola, qua premitur *P* a *GP* ad vim, qua premitur *C* a *BC*, ut differentia qua- Demonstratio primæ partis.

 dratotratorum DG, DP æqualis rectangulo GPg ad quadratum CB; unde, cum quodvis punctum æquè quaquaversus prematur, patet prima theorematis pars.

Demonstratio secundæ.

138. Si autem e quovis puncto K rectæ CB concipiantur exeuntes binæ rectæ parallelæ Ca altera æqualis CB altera CK; eæ referent semper altera vim in B, altera vim in K. Erit igitur vis tota, qua premitur centrum C ab omnibus particulis fluidi K, ad vim, qua premeretur a tota columna habente ubique gravitatem æqualem gravitati in B, ut area, quam generat secunda linea ad aream, quam generat prima. Gereraret autem secunda triangulum, & prima quadratum ejus duplum, ut constat. Igitur patet etiam secunda theorematis pars.

Applicatio ad casum, in quo aliqua vis desit, vel directionem mutet.

139. Patet autem, omnia quæcunque dicta sunt, manere prorsus eodem pacto, etiam si aliqua, vel aliquæ ex 4. viribus in propositione enunciatis evanescerent, vel haberent directionem oppositam, & fierent negativæ; dummodo tam summa earum, quæ in singulis particulis sunt perpendiculares axi sphæroidis, quam summa earum, quæ sunt ipsi parallelæ, sit positiva.

Demonstratio ipsius applicationis.

140. Nam omnia, quæ demonstrata sunt, pendent tantummodo ex eo, quod in singulis particulis summæ virium agentium secundnm directiones perpendiculares axibus Ellipseos genitricis sint, ut distantiæ ab ipsis, & vires totæ in axium verticibus sint reciprocè, ut ipsi axes. Id autem adhuc ita se haberet.

Casus Hermanni erutus ex generali.

141. Er hinc quidem facile patet primo illud, ellipsim illam Hermanni esse casum peculiarem hujus generalis solutionis Mac-Laurini. Si enim evanescat mutua actio particularum, & vis parallela axi, ac remaneat vis in centrum directè proportionalis distantiæ, & vis perpendicularis axi ipsi evadat negativa, habebitur gravitas Hermanni cum vi centrifuga motus diurni, quæ Ellipsim requiret, quam facile demonstratur, fore illam ipsam Hermannianam.

142. Deinde & illud facile deducitur, massam fluidam, quæ circa axem *Bb* convertatur, & Newtoniana gravitate polleat, fore in æquilibrio, ubi disponatur in sphæroidem ellipticam certæ cujusdam compressionis ad polos *B*, *b*. Nam singulæ ejus particulæ haberent cum aliis singulis gravitatem mutuam in ratione reciproca duplicata distantiarum, & præterea vim centrifugam agentem directione *KP*, & proportionalem ipsi *KP*, ut infra etiam videbimus. Compressio autem esset ejusmodi, ut esset *CB* ad *Ca* in ea ratione, in qua est gravitas in *a* mulctata a vi centrifuga ad gravitatem integram in *B*. Si gravitates in *A*, & in *B* essent æquales, ea ratio facile innotesceret ex num. 71, ubi determinavimus rationem gravitatis sub æquatore ad vim centrifugam ibidem: & esset duplo major compressio, quam in hypothesi gravitatis tendentis ad datum centrum ita, ut *VFKQ* fig. 1 haberi possit pro rectangulo, in qua hypothesi invenimus semidiametrum æquatoris ad ejus excessum supra semiaxem esse, ut est gravitas ibidem non ad totam vim centrifugam, sed ad ejus dimidium. Casus Newtonianæ theoriæ. Quid in ea ad cōpressionem definiendam.

143. Verum ipsa gravitas primitiva in æquatore non æquatur gravitati in polo; nam & distantiæ a particulis reliquis, & positiones diversæ sunt in iis binis locis. Quamobrem oportet determinare rationem earum gravitatum per ipsam speciem ellipseos genitricis, ut deinde per eam determinetur ipsa species. Data specie curvæ genitricis docuit Newtonus, quo pacto per curvarum quadruturas computari possit gravitas in puncto axis quocumque solidi geniti conversione ejus curvæ circa proprium axem, atque id ipsum in ellipsoide per circuli, & hyperbolæ quadraturam; sed pro puncto posito in æquatore rem nequaquam perfecit, verum crassa quadam æstimatione invenit utcumque pro ellipsoide data, & parum abludente a sphæra. Mac-Lavrinus multo sane elegantius accuratissime, & felicissime rem perfecit tam pro puncto posito in polo, quam pro puucto posito in æquatore; cujus determina- Ratio gravitatis primitivæ in æquatore, & polo a Newtono tentata, a Mac-Laurino definita.

 tionis

tionis ſubſidio elegantiſſimam itidem ellipſeos genitricis determinationem exhibuit.

Methodus ſimplicior, & geometrica.

144. At ea quidem determinatio operoſior eſt aliquanto, & culculum fere poſcit. Mihi vero adeſt methodus multo expeditior, quæ cum Bernoulliana ex parte congruit, ſed quæ ſolius Geometriæ ope rem facile admodum perficit pro ſphæroide parum abludente a ſphæra. Eam adhibebo, derminando prius gravitatem primitivam puncti poſiti in polo ejus ſphæroidis, tum puncti poſiti in æquatore, & brevitatis gratia utar identidem algebraico ſigno æqualitatis, ut & multiplicationis pro ratione compoſita ex pluribus directis, ac diviſionis pro compoſita ex directis, & reciprocis de more, ac ope Geometriæ, & ejuſmodi ſignorum delabar ad computandam gravitatem primitivam in iis binis locis.

Problematis expoſitio pro puncto poſito in polo.

Tab. 4, F. 17

145. Generet igitur in fig. 17. converſione facta circa axem comunem *Bb* ſemiellipſis *BAb* ellipſoidem, & ſemicirculus *BEb* ſphæram, & quæratur differentia vis, qua punctum *B* attrahitur in ſphæroidem, a vi, qua attrahitur in ſphæram, poſito, quod attrahatur in ſingulas utriuſque particulas in ratione directa ipſarum, & reciproca duplicata diſtantiæ ab ipſis.

Præparatio ad analyſim geometricam.

146. ſit ſemidiameter æquatoris ſphæroidis *CA*, ſphæræ *EC*, & ordinata quædam perpendicularis axi occurrat ipſi in K, ellipſi in *P*, circulo in *D*. Oportet invenire attractionem puncti *B* in omnes anulos, quos motu ſuo generant omnes *DP*. Exponat autem vim, qua punctum *B* attrahitur in particulam quamcumque, ipſa particula diviſa per quadratum diſtantiæ, & concipiatur *PD* ita exigua, ut *BD* aſſumi poſſit pro diſtantia omnium particularum, quæ in ea continentur.

Ratio vis anuli cujuſdam.

147. Vis igitur abſoluta, qua *B* attrahitur ab anulo *DP*, erit, ut is ipſe anulus directè, & quadratum *RD* reciprocè. Quoniam autem in Ellipſi ex notiſſima ejus proprietate, meorum elementorum tomo 3 num. 365, eſt *KP* ad *KD*, in conſtanti ratione *CA* ad *CE*; erit *KP*, ut

KD,

KD, adeoque & circulus genitus a KD, & circulus genitus a KP, & residuus anulus genitus a DP, ut KD^2, cum nimirum circuli sint, ut quadrata radiorum. Vis igitur absoluta erit, ut $\frac{KD^2}{BD^2}$. Porro hæc vis absoluta agens per DB resolvi potest in duas DK, BK, quarum prior eliditur actionibus contrariis, posterior trahit punctum B versus centrum C; ac est ut BD ad BK, ita vis ea absoluta ad vim relativam, cujus habenda est ratio. Hæc igitur vis erit, ut $\frac{KD^2 \times BK}{BD^3}$, sive ut $\frac{KD^2 \times BK \times BD}{BD^4}$; adeoque cum ex circuli natura sit BD^2, ut BK, & $KD^2 = bK \times BK$, erit ea vis relativa, ut $\frac{bK \times BK^2 \times BD}{BK^2}$, sive ut $bK \times BD$.

148. Ut inveniatur recta, quæ ejusmodi vim exprimat, sit BMN parabola Apolloniana axe, & parametro Bb, & cum ex natura ejus curvæ sit $KM^2 = BK \times Bb$, erit KM æqualis BD; unde etiam patet, fore $bN = bB$. Sit jam alia curva BLN, in qua sit ut Bb ad BK, ita KM ad KL, quæ itidem erit ex familia parabolarum. Erit enim KM, ut $BK^{\frac{1}{2}}$, & KL, ut $KM \times BK$, adeoque ut $BK^{\frac{3}{2}}$. Erit autem per conversionem rationis Bb ad bK, ut KM, vel BD ad ML, quæ ob Bb constantem, erit ut $bK \times BD$, adeoque, ut illa vis relativa. Refert igitur ipsa ejusmodi vim, & area tota $BLNMB$ vim totam, qua omnes anuli AP attrahunt punctum B. *Vis ipsa expressa per lineam, & omnium summa per superficiem datam.*

149. Jam vero ut possit computari ejusmodi vis, concipiatur, puncta $PDKLM$ abire in $AECFG$. Erit tum GF dimidia CG, cum sit ad eam, ut bC ad bB; ipsa autem $CG = BE$, & $BE^2 = 2BC^2$. Anulus EA æquabitur producto ex EA, & circumferentia circuli descripta a puncto E, quæ, si ratio radii ad circumferentiam dicatur 1 ad c, erit $= c \times CE = c \times BC$, adeoque anulus erit $c \times BC \times EA$. Vis igitur absoluta ipsius anuli EA erit $\frac{c \times BC \times EA}{BE^2} = \frac{c \times BC \times EA}{2BC^2} = \frac{c \times EA}{2BC}$, vis autem relativa habe- *Ejusdem summæ absolutus valor.*

bitur ducendo ipſam in BC, & dividendo per BE, adeoque erit $\frac{c \times EA}{2BE} = \frac{c \times EA \times BE}{2BE^2}$, vel poſito $2BC^2$ pro BE^2, CG, vel $2FG$ pro BE, erit ea vis $\frac{2c \times EA \times FG}{4BC^2} = \frac{c \times EA \times FG}{2BC^2}$. Quare cum vis anuli EA ad vim anuli DP ſit, ut FG ad LM, erit vis anuli $DP = \frac{c \times EA \times LM}{2BC^2}$, adeoque vis omnium anulorum ſimul erit tota area $BFNGB$, quam texunt omnes LM, ducta in quantitatem datam $\frac{c \times EA}{2BC^2}$.

Valor areæ adhibitæ ad exprimendam eã virium ſummam.

150. Remanet, ut computetur area $BFNGB$. Ea generaliter in parabola quavis, cujus ordinata ſit, ut poteſtas m abſciſſæ, eſt ad rectangulum ſub abſciſſa, & ordinata, ut 1 ad $m+1$, quemadmodum etiam ſupra diximus num. 36. Nimirum ſi KL ſit, ut BK^m, erit area $BKL = \frac{1}{m+1} \times BK \times KL$. Hinc cum KM ſit, ut $BK^{\frac{1}{2}}$, erit area tota $BbNGB = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} \times Bb \times bN = \frac{2}{3}Bb^2 = \frac{8}{3}BC^2$. Cum vero ſit KL, ut $BK^{\frac{3}{2}}$, erit area $BbNFB = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} \times Bb \times bN = \frac{2}{5} \times Bb^2 = \frac{8}{5}BC^2$. Quare tota area $BFNGB$ erit $\frac{8}{3}BC^2 - \frac{8}{5}BC^2 = \frac{16}{15}BC^2$.

Ejus ope ſimpliciſſima expreſſio ejuſdem ſummæ.

151. Si igitur hic valor demum ducatur in $\frac{c \times EA}{2BC^2}$, habebitur gravitas tota primitiva in polo B, quam exprimet $\frac{8}{15} \times c \times EA$. Nimirum exprimetur ejuſmodi vis per $\frac{8}{15}$ peripheriæ circelli deſcripti radio EA, cum $c \times EA$ ſit peripheria ejus circelli. Et ea quidem eſt elegantiſſima, & ſimpliciſſima expreſſio ejus vis.

Problema pro puncto poſito in æquatore, & præparatio.
Tab. 4, F. 18, 19

152. Sit jam in fig. 18 corpuſculum in A in æquatore ſphæroidis genitæ revolutione circa axem Bb. Concipiantur bina alia ſolida nimirum ſphærois, quæ haberetur ex revolutione circa axem Aa, & ſphæra $AEae$ eâdem diametro Aa, quæ ſolida ſi ſecentur plano eodem

GPpg

$GPpg$ perpendiculari ad rectam Aa, sectio sphæroidis descriptæ axe Aa erit circulus diametro Gg, sectio sphæræ erit circulus diametro Pp, sectio sphæroidis descriptæ axe Bb erit Ellipsis genitrici similis habens pro altero axe Gg, pro altero rectam æqualem Pp. Cætera quidem patent vel per sese, vel ex iis, quæ præmisimus; hoc autem postremum inde deducitur facile, cum debeat esse axis Gg ellipseos sectionis ad axem alterum, ut Bb ad Aa, sive ad Ee, nimirum ut idem Gg ad Pp. Referat eas sectiones figura 19, & erit, ellipsis $GRgr$, cui alter circulorum $PrpR$, $GigI$ erit circumscriptus, alter inscriptus. Anulus vero circularis GP erit differentia spheroidis in fig. 18 descriptæ axe Aa a sphæra; duplex autem figuræ 19 meniscus $RPrG$, & $Rprg$ erit differentia sphæroidis descriptæ in fig. 18 axe Bb ab eadem sphæra.

153. Jam vero ex nota Ellipseos proprietate elementorum meorum tomo 3, num. 385 est circulus circumscriptus ad Ellipsim, ut ea ad circulum inscriptum; ac proinde cum Ellipsis, & circulus inscriptus sint proximè æquales inter se, erunt itidem proximè æquales priores bini menisci posterioribus. Quare duplex meniscus $RPrG$, $Rprg$ est dimidium anuli, ac proinde cum in fig. 18 omnes particulæ tam anuli, quam menisci eandem proximè habeant & distantiam a puncto A, & positionem respectu ipsius, ejus attractio orta ex duplici illo menisco erit dimidia attractionis, quæ oriretur ex anulo. Cum vero id ubique contingat, vis puncti ejusdem siti in A orta ex differentia sphæroidis axe Bb erit dimidia ejus, quæ oritur ex differentia sphæroidis axe Aa, & ejusdem sphæræ. Est autem hæc posterior ex præcedentis problematis solutione $\frac{8}{15} \times c \times EB$: Quare erit illa prior $\frac{4}{15} \times c \times EB$; Quod erat inveniendum. *Problematis solutio, & demõstratio.*

154. Solutis hisce problematis, facile jam invenitur ratio gravitatis primitivæ in polo ad gravitatem in æquatore expressa per eandem EB, sive sphærois sit oblonga, & pro- *Ratio gravitatis primitivæ in æquatore ad gravitatem in polo quo pacto investiganda.*

& producta, sive oblata, & compressa. Sed ad id inveniendum requiritur theorema notissimum, profluens ex demonstratis a Newtono, quod sphæra quævis punctum situm extra ipsam, vel in ejus superficie attrahat, tanquam si tota ejus massa compenetraretur in centro. Sit r radius sphæræ cujusdam, & erit $2r$ diameter, $\frac{1}{2}crr$ circulus maximus, $2crr$ superficies, $\frac{2}{3}cr^3$ tota moles, adeoque vis puncti constituti in ejus superficie expressa per ipsam sphæram, sive numerum particularum directè, & quadratum distantiæ reciprocè erit $\frac{2}{3}cr$.

Ejus determinatio in sphæroide compressa. Tab. 4, F. 17

155. Sit in fig. 17 sphærois compressa ad polos Bb, cujusmodi esse debet ob vim centrifugam in æquatore, qua fit, ut ibi assurgat massa fluida, & erit gravitas puncti B in sphæram diametro $Bb = \frac{2}{3} \times c \times CB = \frac{2}{3} \times c \times CA - \frac{2}{3} \times c \times EA$. Huic si addatur $\frac{8}{15} \times c \times EA$, erit vis ibidem in sphæroidem compressam $\frac{2}{3} \times c \times CA - \frac{10}{15} \times c \times EA + \frac{8}{15} \times c \times EA = \frac{2}{3} \times c \times CA - \frac{2}{15} \times c \times EA$. Gravitas puncti A in sphæram radio CA erit $\frac{2}{3} \times c \times CA$, a qua si dematur $\frac{4}{15} \times c \times EA$, habebitur gravitas puncti A in sphæroidem $\frac{2}{3} \times c \times CA - \frac{4}{15} \times c \times EA$. Quamobrem gravitas in sphæroidem in polo B ad gravitatem in eandem in æquatore B erit, ut $\frac{2}{3} \times c \times CA - \frac{2}{15} \times c \times EA$ ad $\frac{2}{3} \times c \times CA - \frac{4}{15} \times c \times EA$, sive ob EA admodum exiguam respectu CA, proxime, ut $\frac{2}{3} \times c \times CA$ ad $\frac{2}{3} \times c \times CA - \frac{2}{15} \times c \times EA$, nimirum, ut CA ad $CA - \frac{1}{5} \times EA$.

Eadem in sphæroide oblonga.

156. Quod si sphærois esset oblonga, ipsa EA migraret e positiva in negativam, & haberetur ratio ejusmodi gravitatum CA ad $CA + \frac{1}{5} \times EA$.

Compressio determinanda: quæ vires omittédæ, quæ considerandæ.

157. Inventa hujusmodi ratione, definitur jam facile etiam compressio orta ex motu diurno juxta n. 142. In hoc casu ex illis tribus virium generibus, quæ n. 121 assumptæ sunt in conditionibus theorematis præter vim mutuam in ratione reciproca duplicata distantiarum, unica habetur in casu nostro, ea nimirum, quæ oritur ex vi centrifuga, & agit secundum directionem CA perpendicularem axi Bb. Reliquæ binæ pertinent ad casum

marini

marini æſtus, in quo inæqualis magnitudo, & diverſa directio virium, quibus particulæ Telluris in Solem, vel in Lunam gravitant, addit binas vires alteram tendentem ad centrum Terræ, alteram ſecundum directionem ad ſenſum perpendicularem plano tranſeunti per centrum ipſum, & perpendiculari rectæ, quæ Terram jungit cum Sole, vel Luna, ac proportionalem diſtantiæ ab eodem plano.

158. His igitur viribus omiſſis, quæ ad noſtrum caſum non pertinent, ſit jam gravitas primitiva ſub æquatore $=m$, vis centrifuga $=n$. Erit ibidem gravitas reſidua $=m-n$. Quod ſi ponatur ſemidiameter æquatoris $=r$, ejus differentia a ſemiaxe $=x$, erit ut $r-\frac{1}{5}x$ ad r, ſive proximè ob x admodum exiguam reſpectu r, ut r ad $r+\frac{x}{5}$, ita gravitas primitiva in æquatore $=m$ ad gravitatem primitivam in polo, quæ erit $m+\frac{mx}{5r}$. Quare vis in æquatore ad vim in polo erit, ut $m-n$ ad $m+\frac{mx}{5r}$, ſive proxime, ut m ad $m+\frac{mx}{5r}+n$. Debent autem hæ vires eſſe in ratione reciproca diſtantiarum a centro per num. 121, adeoque erunt, ut r ad $r+x$; unde aſſumptis differentiis, fit m ad $\frac{mx}{5r}+n$, ſive 1 ad $\frac{x}{5r}+\frac{n}{m}$, ut r ad x, ſive ut 1 ad $\frac{x}{r}$. Quare erit $\frac{x}{5r}+\frac{n}{m}=\frac{x}{r}$, ſive $\frac{n}{m}=\frac{4x}{5r}$, vel $\frac{x}{r}=\frac{5n}{4m}$ nimirum $m.\frac{5}{4}n::r.x$. Habebitur igitur hujuſmodi theorema. *Ut gravitas ſub æquatore ad $\frac{5}{4}$ vis centrifugæ ibidem, ita ſemidiameter æquatoris ad differentiam ipſius a ſemiaxe.* Determinatio cōpreſſionis per rationem gravitatis ad vim cētrifugam.

159. Quod ſi adhibeatur ratio gravitatis ſub æquatore ad vim centrifugam ibidem veræ proxima in numeris juxta num. 71, ut 289 ad 1; erit ea ratio ſemidiametri æquatoris ad differentiam 289 ad $\frac{5}{4}$, vel 1156 ad 5, ſive proxime 231 ad 1, proxima illi 230 ad 1, quam invenit Abſoluta compreſſio pluſquam duplo major, quā Hermanno.

Newtonus Principiorum lib. 3. prop. 19, existente ratione semidiametri æquatoris ad semiaxem 231 ad 230. Et hæc quidem compressio est plusquam duplo major illa, quam Hermannus in sua Ellipsi invenerat, quam num. 72 vidimus esse debere respondentem dimidiæ vi centrifugæ sub æquatore, non quinque ejus quadrantibus, adeoque non $\frac{1}{231}$ totius, sed $\frac{1}{578}$ tantummodo.

Hermanni censura erronea in Newtonum, & Gregorium.

160. Et quidem Hermannus censuit, hanc ipsam suam Ellipsim esse illam, quæ in Newtoniana gravitatis theoria debeat obvenire, ac Gregorium, & Newtonum ipsum culpandos existimavit, quod ii id ipsum non viderint, & plusquam duplo majorem justo compressionem Telluri tribuerint, quam ipsa illorum principia postularent. At Hermannus ipse in eo erravit sane quamplurimum, & ejus hypothesis illa gravitatis se dirigentis ad unicum punctum, & directè proportionalis distantiæ ab eodem puncto plurimum distat a Newtoni theoria gravitatis compositæ ex tendentia in particulas singulas in ratione reciproca duplicata distantiarum a centro.

In Newtoni theoria vim utique in quovis canali ad centrũ ducto esse, ut distantiam a centro.

161. In Newtoni theoria in quovis canali ad centrum terminato nisus cujuscumque particulæ in centrum ipsum est utique in ratione distantiæ ab ipso centro, & gravitas residua in superficie in ratione reciproca distantiæ ab eodem centro, quod & Newtonus ipse deprehendit debere consequi ex sua theoria, si ea ellipticam figuram requireret ad æquilibrium habendum, quod postremum ille quidem demonstrare non potuit, felicissimè tamen divinavit.

Ejus demonstratio ex Newtono ipso, quod pertinet ad gravitatem primitivã

162. Demonstravit nimirum Newtonus, punctum ubicumque situm intra orbem ellipticum clausum binis Ellipsibus similibus, & similiter in centro collocatis esse prorsus in æquilibrio, & punctum collocatum in homologis punctis solidorum similium attrahi in sua theoria in ratione simplici laterum homologorum, quæ duo supra posuimus num. 93, & 92. Inde ipsi pronum fuit deducere, in accessu ad centrum intra sphæram, vel sphæroidem

roidem ellipticam vim decreſcere in ratione directa ſimplici diſtantiarum ab ipſo centro. Si enim concipiatur ſuperficies ſphærica, vel elliptica externæ ſimilis tranſiens per punctum ipſum, totus ille orbis externus concluſus hac nova, & illa priore externa ſuperficie nihil aget, & relinquetur ſola actio ſphæræ, vel ſphæroidis nova ipſa ſuperficie incluſæ, cujus actio debebit eſſe proportionalis diſtantiæ a centro, quæ quidem eſt unum ex homologis lateribus.

163. Et hoc quidem pacto evaſit ipſi gravitas primitiva intra ſphæram, vel ellipticam ſphæroidem directe proportionalis diſtantiæ a centro. Vis autem centrifuga proportionalis eſt diſtantiæ ab axe juxta num. 17, unde admodum facile deducitur illud, ſive conſideretur ea tota, ſive ea ejus reſolutæ pars, quæ gravitati ad centrum directæ opponitur, eam eſſe itidem proportionalem diſtantiæ a centro. Inde vero conſequitur, etiam reſiduam gravitatem ubique intra ſphæram, vel ſphæroidem, ſi ea, quæ ad centrum tendit in canali quopiam ad ipſum centrum terminato conſideretur, fore directè, ut diſtantiam a centro. Eadé quod pertinet ad vim cétrifugam.

164. Eſſe autem reciprocè, ut diſtantiam a centro in diverſis punctis ſuperficiei extimæ, hac ratione admodum facile Newtonus ipſe demonſtravit. Concipiantur bini canales quicumqne egreſſi e centro, & ad quævis ſuperficiei puncta terminati, qui quidem debent eſſe in æquilibrio. Secentur in æqualem numerum partium proportionalium, & quoniam ſingulæ particulæ ſingulorum in ſingulis partibus incluſæ gravitabunt in centrum in ratione diſtantiæ a centro, ratio autem diſtantiæ in partibus homologis eſt eadem, ac totorum canalium; erunt vires ſingularum particularum alterius canalis ad ſingulas alterius incluſas partibus homologis in conſtanti ratione totorum canalium, adeoque & ſummæ in ratione eâdem, nimirum pondera partium homologarum, ut pondera totorum canalium, videlicet æqualia. Cum autem pondus In ſuperficie eſſe vim in ratione reciproca diſtátiæ.

partis unius canalis, ſit æquale ponderi partis homologæ alterius, erit ſingularum particularum vis in parte canalis alterius ad vim particularum in parte alterius reciprocè, ut earum particularum numerus, nimirum reciprocè, ut illæ partes, adeoque reciprocè, ut toti canales, & ut partium ipſarum homologarum diſtantiæ a centro. Quare particularum omnium, quæ ſitæ ſint vel in ſuperficie extima, vel intra ſphæroidem in rectis quibuſcumque ductis a centro ad ſuperficiem, & diſtantias habeant a centro proportionales illis rectis, ſunt ad ſe invicem reciprocè, ut ipſæ diſtantiæ.

Determinatio ellipſeos Hermãni e ſimilibus datis.

165. Hæc cum videret Hermannus inquiſivit in figuram, quam habere debeat fluidum, quod habeat vires directas ad centrum in ratione directa diſtantiarum, gyret autem circa proprium axem; & inveſtigata figura ex hac conditione, invenit Ellipſim, in qua ſemidiameter æquatoris ad ſemiaxem ſit in ratione ſubduplicata gravitatis primitivæ ſub æquatore ad gravitatem reſiduam ibidem, adeoque ſemidiameter ipſa ad exceſſum ſupra ſemiaxem proxime, ut ea gravitas primitiva ad dimidiam vim centrifugam, vel ut 578 ad 1, vis autem reſidua in diverſis ſuperficiei punctis ſit in ratione reciproca diſtantiarum, quæ quidem ſupra hìc etiam demonſtravimus numeris 47, & 49. Quæſivit e converſo figuram ex hypotheſi, quod vis reſidua in ſuperficie ſit reciprocè, ut diſtantia a centro, & invenit ellipſim illam eandem, ac invenit, gravitatem primitivam directam ad centrum debere eſſe in ratione diſtantiarum directa, quod is quidem methodo ſynthetica demonſtravit admodum operoſa, ego vero facili calculo in mea de figura Telluris diſſertatione.

Concluſio Hermanni inde deducta.

166. Hiſce compertis illud intulit, hæc tria eſſe omnino inter ſe connexa, gravitatem primitivam eſſe directè proportionalem diſtantiæ, gravitatem reſiduam in ſuperficie eſſe reciprocè proportionalem diſtantiæ, & figuram eſſe ellipſim, in qua ſit ſemidiameter æquatoris ad diffe-

differentiam ipsius a semiaxe, ut est gravitas sub æquatore ad dimidiam vim centrifugam ibidem, ac quodlibet ex hisce tribus reliqua secum trahere; quod quidem cum ipsi obtigisset tam methodo canalium, quam methodo directionis perpendicularis superficiei, multo magis in sententia confirmatus Gregorium carpendum sibi esse duxit, ac Newtonum.

167. Et quidem hæc Hermanni ratiocinatio mihi etiam, cum primum dissertationem meam edidi anno 1739, fucum fecit, non tamen ut ipsi assentirer, & compressionem in Newtoni sententia censerem esse debere $\frac{1}{578}$ partem totius. Videbam enim, ut ibidem proposui, illud a Newtono accuratè admodum esse demonstratum, si ellipticam figuram habeat fluidum, cujus particulæ in se invicem tendant in ratione reciproca duplicata distantiarum, & quod circa suum axem gyret, debere compressionem esse $\frac{1}{230}$ totius, quod Newtonus definiverat methodo quidem indirecta falsæ positionis usus, sed pro ejusmodi re satis, accurata, & tuta, & gravitatem intra canalem quemvis debere esse directè, in diversis vero superficiei punctis reciprocè proportionalem distantiæ a centro. Sed cum ex hisce positionibus obveniret quidem ellipsis, at compressio evaderet $\frac{1}{578}$ pars totius, suspicatus sum illud, falsum esse, quod Newtonus sine ulla demonstratione assumpserat, in ejus theoria debere fluidum componi in Ellipsim, quo sublato neutrum ex illis reliquis duobus consequebatur. Ejus error in quo olim imposuerit Auctori hujus opusculi.

168. At quoniam insequenti anno elegantissima MacLaurini demonstratio innotuit mihi figuræ ellipticæ a Newtoni theoria ad æquilibrium requisitæ cum compressione illa ipsa, quam ex ejus figuræ hypothesi Newtonus deduxerat; in Hermanni errorem diligentius inquisivi, cujus & originem alteram e binis, quas mox proponam, exposui in eadem dissertatione haud ita multo post edita Lucæ in opusculorum collectione quadam, in qua tamen schemata potissimum tam multis, & enormibus Solutione MacLaurini error deprehensus.

omni-

omnino ubique ſcatent erroribus, ut vix ulli quidem uſui opuſculum illud eſſe poſſit.

Erroris fons primus. Tab. 4, F. 7 14

169. Eſt autem primus erroris fons, quod ubi in figuram inquiritur per directionem perpendicularem ſuperficiei in hypotheſi Hermanni vis componitur ex binis, quarum prior, nimirum gravitas primitiva, dirigitur ad centrum, ut in fig. 7 *LN* per *LC*, ſecunda vero eſt vis centrifuga *LO*, quæ tendit ad partes axi oppoſitas; at in theoria Newtoniana, ipſa illa gravitas primitiva non tendit ad centrum, ſed per rectam in fig. 14 inclinatam ad *PC* ita, ut accedente præterea vi centrifuga, vis ex iis compoſita directionem habeat remotiorem a recta tendente ad centrum in Newtoni, quam in Hermanni hypotheſi, & majorem compreſſionem requirat.

Alter ejuſdem erroris fons.

170. Secundus erroris fons eſt, quod in hypotheſi Hermanni gravitas primitiva in æquatore debet eſſe major, quam in polo in ratione diſtantiæ majoris, dum in Newtoni ſententia debet eſſe minor. In Hermanni quidem hypotheſi facta, ut ſupra fecimus ſemidiametro æquatoris $=r$, differentia $=x$, debet eſſe gravitas primitiva in æquatore ad gravitatem in polo, ut $r+x$ ad r, in Newtoni ſententia, ut $r-\frac{1}{5}x$ ad r. Hinc gravitatis reſiduæ in æquatore ratio ad gravitatem in polo in Newtoni ſententia minor, quam in hypotheſi Hermanni, & proinde major, in methodo æquilibrii canalium, inæqualitas altitudinis canalium ipſorum neceſſaria ad compenſandam gravitatum earundem inæqualitatem.

Quantum theoria Newtoni differat a theoria Hermanni.

171. Atque hoc demum pacto jam in aperto eſt poſitus Hermanni error, & abunde patet, quid in Newtoniana theoria haberi debeat, ubi fluidum homogeneum ſit, & gyret circa proprium axem. Patet itidem multo difficiliorem eſſe determinationem figuræ in ipſa ejus theoria, quam ſi aſſumatur vis ad centrum tendens in ratione diſtantiæ ab ipſo, & vis reſidua in ſuperficie in ratione ipſius reciproca: falli autem omnino eum, qui, ubi ex ea hypotheſi definiat, quid conſequi debeat, cum

agitur

agitur vel de figura orta ex diurna vertigine, vel de maris æstu orto ab inæquali actione vel Solis, vel Lunæ in diversas Terræ particulas, putet, se tam facile definivisse id, quod Newtoniana requirat theoria,

172. Nec illud autem omittendum, a Newtono non esse adhibitas binas hypotheses alteram pro particulis infra superficiem sitis, alteram pro particulis sitis in superficie, sed ex ipsa generali mutua actione particularum in se invicem in ratione reciproca duplicata distantiarum utramque consequi; multo autem minus licere binas ejusmodi hypotheses ad peculiare aliquod phænomenum explicandum ad arbitrium effingere, quæ non tantum inter se plerumque non connectentur, sed pugnabunt etiam, & penitus adversabuntur; nec vero ad singula phænomena singulas hypotheses confingendas esse, utcumque nihil in iis habeatur, quod repugnet, & absurdum sit, nec id Newtonum præstitisse, qui generalem gravitatem ex tam multis phænomenis derivavit, & ad alia tam multa traductam tam belle consentire deprehendit, nullo huc usque invento phænomeno, quod cum ea conciliari non possit, plurimis inventis, quæ, postea quam ab ea deducuntur, successu, & conspiratione principium illud commendant plurimum, ex quo deducta sunt. Sed de his jam satis.

Quantum errer, qui Newtonum diversas, & inconnexas hypotheses secutum censeat, vel sequatur ipse.

173. Illud unum superest, ut definiamus, in qua ratione in hac Newtoniana ellipsi decrescant distantiæ ab æquatore ad polum, crescat autem gravitas. Id autem admodum facile definitur methodo, quam adhibui jam tum in illa dissertatione de figura Telluris. Sit in fig. 20 ECe diameter æquatoris, BCb axis ellipseos parum abludentis a circulo, & per quodvis ejus punctum P ducta recta CP, quæ circulo circumscripto occurrat in D, d, ac chorda ipsi Ee perpendiculari, quæ occurrat ellipsi iterum in p, circulo in F, f; erit DP decrementum distantiæ, cui proximè proportionale erit etiam incrementum gravitatis residuæ cum sit, ut CE, sive CD ad CP

In qua ratione in Ellipsi Newtoni decrescant distantiæ a centro in pogressu ab æquatore ad polum. Initium analyseos. Tab. 4, Fig. 20

CP ita gravitas in *P* ad gravitatem in *E*, adeoque *DP* ad *CP* proxime constantem, ut est incrementum gravitatis ad constantem gravitatem *CE*.

Determinatio rationis ejus decrementi.

174. Jam vero ex circuli natura est $DP \times Pd = FP \times Pf$; adeoque ob *Pd* proxime constantem est *DP* proxime, ut *FP*, & *Pf* conjunctim. Porro quoniam ex ellipseos natura Elementorum meorum tomo 3 num. 365 est *GF* ad *GP*, vel *Gp* in constanti ratione *CE* ad *CB*, erit & *GP*, & *Gf*, adeoque & earum differentia *PF*, & earum summa *Pf*, ut *GF*. Hinc illa ratio composita erit eadem ac duplicata rectæ *GF*, sive sinus arus *EF*, qui proximè metitur distantiam loci ab æquatore, sive latitudinem. Quare habebitur & hìc hoc theorema, ut supra num. 44, ac 48: *Est decrementum distantiæ, & incrementum gravitatis ab æquatore ad polum in ratione duplicata sinus recti latitudinis, vel in ratione simplici sinus versi latitudinis duplicatæ.*

Eadem ac ratio incrementi graduum. Ploblema figuræ inquirendæ mutatis densitatibus.

175. Porro videbimus sequenti capite, hanc eandem esse rationem incrementi graduum meridiani in ellipsi ab equatore ad polum. Sed interea videndum, cujus figuræ debeat esse Tellus, si densitas sit alibi alia, & primo quidem, quid si certa lege crescat, vel decrescat a centro ad superficiem, deinde quid irregularis textus secum ferat.

Assumptum tutissimũ, sed Bernoullio olí perniciosum, nuclei cũ sphæricis orbibus homogeneis circumquaque.

176. Consideremus igitur primo quidem globum solidum fluido circumdatum, quem ipsum in Tellure habemus casum; quo solido densitas in progressu a centro ad circumferentium mutetur utcumque, illud autem fluidum sit densitatis constantis. Considerabimns autem densitatem ipsam in iisdem a centro distantiis circumquaque æqualem. Id in fluida massa præstitit Daniel Bernoullius, in dissertatione de maris æstu, sed id, ut paullo infra videbimus, virum cæteroquin summum, & nulla unquam commendatione satis laudandum in errorem induxit. At id quidem si fiat cum debita præcautione in massa nuclei solida, & parum abludente a spherica forma, omnino

no licet. Si enim ſtrata denſitatis ejuſdem formam & ipſa habeant a ſphærica abludentem, ſtrata itidem ſphærica ita parum ab homogeneitate differe poſſunt, ut iis ad veram homogeneitatem redactis, nihil ad ſenſum mutetur gravitas fluidi ambientis, & poſiti in ſuperficie, a cujus gravitatis poſitione pendet æquilibrium, quod quidem poſſet ſane accurrantiſſime demonſtrari; ſed per ſeſe ſatis manifeſtum eſſe cenſeo. Porro is caſus erit idem, ac ſi totus nucleus ille ſolidus homogeneus eſſet, materia omni per ipſum æqualiter diſtributa. Nam ſinguli orbes ſphærici homogenei ita trahunt tam in primo, quam in ſecundo caſu, ut traherent ſi in centro omnis eorum materia colligeretur, quod ex demonſtratis a Newtono facile admodum deducitur.

177. Conſideremus igitur globum ſolidum, cujus orbes concentrici homogenei ſint, denſitate in diverſis diſtantiis mutata utcunque; is autem ambiatur a fluido, & ſingulæ fluidi particulæ tam in ſe invicem, quam in particulas ſolidi tendant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, & convertatur circa proprium axem, ac in æquilibrio ſit. Quidquid in ſingulis orbibus excedit denſitatem fluidi ambientis, adducatur ad centrum, & in eo compenetratum intelligatur: æquilibrium fluidi manebit; gravitate ipſius in maſſam nuclei nihil mutata.

Maſſa redundans in fluido abacta in centrum.

178. Habebimus hoc pacto globum ſolidum cum fluido ambiente homogeneo ipſi globo, & præter vires extraneas pro vi, qua particulæ ſe invicem trahebant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, habebuntur jam binæ vires, una directa ad centrum in ratione reciproca duplicata diſtantiarum ab ipſo centro, & altera, qua partes fluidi jam homogenei ſe trahant in ratione pariter reciproca duplicata diſtantiarum a ſe invicem. Diſſolvatur jam hoc fluidum, & liqueſcat, ac quæratur ſtatus æquilibrii totius hujuſce fluidi; eo enim ſtatu invento, ſi iterum concreſcat globus idem, fluidum reliquum non

Soluto nucleo jam homogeneo caſus priori æquivalens.

mutabit ſtatum, non mutata neque directione, neque magnitudine virium cujuſcumque particulæ.

Secunda hypotheſis, maſſæ e centro attrahẽtis in ratione diſtantiarum.

179. Ut autem inveniatur ſtatus fluidi in hac prima hypotheſi; concipiatur hypotheſis ſecunda, in qua reliquis viribus manentibus, vis etiam, quæ tendit in maſſam in centro coadunatam, maneat eadem, quæ eſſe debet, in ipſa ſuperficicie extima fluidi in polo, in reliquis autem diſtantiis a centro quibuſcunque non ſit in ratione reciproca duplicata deſtantiarum a centro, ſed in ſimplici directa. Fluido in hac ſecunda hypotheſi ad æquilibrium redacto, quæratur diſcrimen figuræ, in quam ſe debet fluidum componere in illa hypoteſi priore a figura debita huic poſteriori hypotheſi.

Secundæ hypotheſeos reductio ad generalem Mac-Laurini ſolutionem.

180. In hac poſteriore hypotheſi omnia perinde accident, ac ubi ſuperius inquiſitum eſt in æquilibrium fluidi homogenei, cujus particulæ ſe attrahant invicem in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, & tribus illis viribus præterea ſollicitentur; quarum una dirigatur ad centrum, & ſit in ratione diſtantiarum ab ipſo centro, reliquæ duæ ſint altera perpendicularis axi, altera perpendicularis æquatori, & ſingulæ ſuis diſtantiis ab ipſo axe, vel æquatore proportionales. Conditiones enim habebuntur prorſus eædem.

Schema pro ſecunda hypotheſi Tab. 4. F. 21.

181. Exprimat jam in fig. 21. *BAba*, ſphæroidem Ellipticam, in quam ſe fluidum componeret in ſecunda hac hypotheſi, & ſit *BEbe*, globus habens pro dianaetro axem *Bb*, qui occurrat diametro æquatoris *Aa* in *Ee*. Erecta *EG* ad arbitrium aſſumpta, & perpendiculari ad *Aa*, quæ exprimat vim in illam maſſam poſitam in *C* debitam diſtantiæ *EC*, ſive *CB*, ducatur *CG* occurrens rectæ *AI* parallelæ ipſi *EG* in *I*, & per *G* tranſeat hyperbola cubica *LG* habens pro aſymptotis rectas *bC*, *CA*, & occurrens *AI* in *L*, cujus ordinatæ *EG*, *AL* ſint in ratione reciproca duplicata abſciſſarum *EC*, *AC*.

Diſcrimen ſecundæ a prima.

182. Si ſecunda Hypotheſis mutetur in primam; mutatio

tatio gravitatis in cruribus *BC*, *CE* erit prorſus æqualis. In intervallo autem *AE* amittetur pars quædam gravitatis ipſius. Nam particula *A* in ſecunda hypotheſi haberet gravitatem *AI*, & in prima *AL*. Quare pondus columnæ *AE* in ſecunda Hypotheſi exprimeretur per aream *AIGE*, in prima per aream *ALGE*; decremento ponderis expreſſo per *LGI*. Si igitur affundatur tantundem fluidi homogenei in *AM* ita, ut habeat tantum ponderis, quantum amittitur in *AE*, & id fiat in omnibus rectis quaquaverſus circa centrum; reſtituetur æquilibrium, & habebitur fluidum etiam in prima hypotheſi in æquilibrio collocatum. & ejus compenſatio in ipſo ſchemate.

183. Porro ut inveniatur illa altitudo *AM*, concipiatur in *GE* productâ recta *EF*, quæ ſit ad *FG*, uti eſt denſitas fluidi ad denſitatem mediam nuclei, ut idcirco ſit *EF* ad *EG*, uti eſt denſitas fluidi ad denſitatem materiæ redundantis poſitæ in centro, quæ utique erit etiam ratio vis puncti poſiti in *E* in globum jam homogeneum fluido, ad vim in materiam coadunatam in centro, cum vis in globum etiam ſit eadem, quæ eſſet, ſi is quoque in centrum abiret totus. Referat autem *ED* vim in totam ſphæroidem jam totam fluidam, quæ vis erit eadem ac vis in ſolam ſphæroidem ſimilem ſphæroidi *ABab* tranſeuntem per *E*, adeoque erit aliquanto minor vi in globum *EBeb*, & ducta per *C*, & *D* recta, quæ occurrat rectæ *ILA* in *N*, exprimet *AN* vim in totam ſphæroidem fluidam, & homogeneam *BAba* ſecundæ hypotheſeos, cum ipſa vis in canali *CA* ſit, ut eſt diſtantia a centro, *IN* vim in totam maſſam compoſitam e ſphæroide homogenea, & maſſa in centro collecta attrahente in ratione directa diſtantiarum, *NL* vim in utrumque, maſsâ centri in prima hypotheſi attrahente in ratione reciproca duplicata diſtantiarum. Constructio pro invenienda cõpenſatione.

184. Sit *NO* verſus *A* ad *NL*, uti eſt vis centrifuga in *A* ad gravitatem ibidem totam, & ducta *CO*, quæ occurrat rectæ *GE* in *K*, patet, fore *DK* vim centrifugam Cõtinuatio ejus investigationis.

 gam

gam in E, cum & ipsa vis centrifuga sit proportionalis distantiæ a centro. Quare erit $OKGI$ totum pondus canalis AE in postrema hypothesi massæ attrahentis ex centro in ratione distantiarum, $OKGL$ pondus ejusdem in prima hypothesi massæ illius ex centro attrahentis in ratione distantiarum reciproca duplicata, LGI discrimen ponderum compensandum a particula AM. Satis igitur erit ducere rectam $RMQP$ parallelam $LAON$ ita, ut area $QOLR$, quæ in priore hypothesi exprimit totum pondus particulæ AM, æquetur areæ LGI, quæ exprimit pondus amissum in regressu a secunda hypothesi ad primam.

Methodus eam inveniendi per quadraturā datam hyperbolæ cubicæ.

185. Porro hujus hyperbolæ cubicæ RLG datur area per abscissas, & ordinatas, nam ejus area ab ordinata quavis EG in infinitum producta æquatur rectangulo sub abscissa CE, & ordinata EG, ac proinde area $LAEG$ differentiæ rectangulorum CEG, CAL, & dantur ordinatæ per abscissas, datur autem per abscissas & area terminata rectis CO, CI. Quare facile esset, vel per Geometriam, vel per analysim invenire punctum M ita, ut area $RQOL$ æquaretur trilineo LGI. Verum ob AE exiguam, & AM multo minorem, res multo facilius perficietur, si consideretur arcus GLR, ut rectilineus.

Trilinei hyperbolici valor habito exiguo ejus usui pro rectilineo.

186. Ducta igitur GH parallela EA, erit triangulum LGI ad rectangulum $AEGH$, ut LI ad duplam AH, sive EG. Est autem in primis EG ad HI, ut CE ad GH, sive AE, & cum sit eadem EG ad AL, ut AC^2 ad CE^2, adeoque dividendo ipsa EG ad HL, ut CA^2 ad rectangulum AEa, sive ob Ea proxime duplam CE, & CA proximam CE, ut eadem illa CE ad duplam AE; erit LH proximè dupla HI, & EG ad totam LI, ut CE ad triplam AE.

Determinatio illius compensationis.

187. Habito autem trapezio $QOLR$ pro parallelogrammo cujus basis OL, vel proximè KG, altitudo AM, & trilineo LGI pro triangulo, cujus basis LI altitudo HG, erit LI ad AM, ut LO, vel KD ad $\frac{1}{2}GH$, sive $\frac{1}{2}AE$. Quare compositis rationibus erit EG ad AM, ut $CE \times KG$ ad $\frac{3}{2}AE^2$, adeoque $AM = \frac{3EG \times AE^2}{2KG \times CE}$; unde eruitur

hæc proportio $KG \,.\, \frac{1}{2} EG :: \frac{AE^2}{CE} \,.\, AM$, ſive ut vis tota in æquatore ad $\frac{1}{2}$ vis tendentis in illam maſſam poſitam in centro, ita tertia continuè proportionalis poſt ſemiaxem, & differentiam ipſius a ſemidiametro æquatoris ad altitudinem illam quæſitam.

188. Porro tres caſus haberi poſſunt. Vel enim denſitas nuclei eſt major denſitate fluidi, vel ipſi æqualis, vel minor. In primo caſu debet jacere *EG* cum toto trilineo *LGI* ad partes oppoſitas rectæ *CE* reſpectu *EF*, ut vis tota in particulis *EA* coaleſcat e ſumma virium in ſphæroidem, & centrum. Hoc caſu *LGI* eſt defectus ponderis hypotheſis primæ, in qua maſſa in centro attrahat in ratione reciproca cuplicata diſtantiarum, ab hypotheſi poſtrema in qua attrahat in ratione ſimplici diſtantiarum directa, adeoque ſuppleri debet ejus defectus addita *AM*. Erit autem ſemper in eo caſu ipſa *AM* perquam exigua. Nam ſemper *DG* in eo caſu erit major, quam *GE*, & cum *DK* reſpectu *DG* debeat eſſe perquam exigua, nimirum vis centrifuga reſpectu gravitatis primitivæ, erit & *KG* vel major ipſa *GE*, vel (ſi forte denſitas fluidi *FE* ſit perquam exigua, ut & *DE* ſit exigua, adeoque *DK*, vel æqualis ipſi, vel ea minor) eidem æqualis, vel ita paullo minor, ut ad rationem æqualitatis proximè accedant. Quare & *AM* vel erit e contrario minor, quam tertia proportionalis poſt *CE*, & *FA*, vel ipſi æqualis, vel ea major ſed ita paullo, ut proximè ad æqualitatem accedant.

Tres caſus nuclei dēſioris fluido, æque denſi, minus denſi. Evolutio primi caſus.

189. In ſecundo caſu nihil materiæ in centro colligitur, evaneſcit trilineum *LGI* abeuntibus *LG*, *GI* in *AE*, *EA*, & caſus reducitur ad Mac-Laurini determinationem pro fluido homogeneo. Nihil in eo addendum ſupra illam ellipſim.

Evolutio ſecundi.

190. In tertio caſu *EG* cum ſuo trilineo *LGI* abit ad partes oppoſitas in *EG'* cum trilineo *L'G'I'*. Tum vero in centro non colligitur materia nuclei redundans, ſed concipitur

Evolutio tertii: maſſa in centro in eo caſu repellens, non attrahens.

pitur in nucleo supplementum materiæ, quod minorem ejus densitatem compenset, & ipsum ad homogeneitatem reducat. Sed idcirco in centro concipi debet tantundem materiæ præditæ vi repulsiva agente in ratione distantiarum reciproca duplicata, quæ materiæ aggestæ nisum elidat. Eo casu trilineum $L'G'I'$ pondus $OKG'I'$ non minuit, sed auget, cum dematur plus, quam demi deberet, si vis repulsiva non cresceret in ratione reciproca duplicata distantiarum, sed cresceret in ratione simplici directa. Hinc AM non deberet addi, sed demi, abeunte ipsa AM in AM' negativam, uti abiit EG in EG'.

Methodū in tertio casu rite procedere, si densitas nuclei non sit perquam exigua.

191. Sed in eo casu nisi EG' plurimum accesserit ad K, omnia ritè procedent. Non accedet autem nisi FG' densitas nuclei fuerit nimis exigua respectu FE densitatis fluidi. Nam vis centrifuga DK semper erit perquam exigua respectu gravitatis DG', & FD semper est exigua respectu FF. Est enim EF ad ED ex hypothesi, ut gravitas puncti E in globum $BEbe$ ad gravitatem in sphæroidem $BAba$, nimirum in sphæroidem ei similem transeuntem per E, adeoque per num. 155, ut $\frac{2}{3}$ CA ad $\frac{2}{3}$ $CA - \frac{4}{15}$ AE, sive ut CA ad $CA - \frac{2}{5}$ AE. Quare in hoc casu id, quod auferendum est, vel est proximum huic tertiæ proportionali, vel ad eam habet rationem non ita magnam, & exiguum manebit; quod semper habebitur, ubi non nimis exigua evaserit densitas nuclei respectu densitatis fluidi.

Compēsatio circum ubique per gyrum similis.

192. Si in quavis recta CVT fiat idem, addendo nimirum, vel auferendo Tt, quæ sit ad tertiam continuè proportionalem post CT, & VT, proximè, ut est densitas nuclei ad summam, vel differentiam densitatum; totum fluidum erit in æquilibrio. Nam æquilibrium ipsum turbari posset solum ab actione attractionis illius mutuæ agentis in ratione reciproca duplicata distantiarum, pendentis ab attractione in illum accessum fluidi $AMtT$, quæ prorsus insensibilis est ob exiguitatem, & distantiam. Si autem ejus habenda esset ratio, oporteret alium meniscum

adde-

addere, vel auferre, qui differentiam virium compensaret, qui quidem respectu prioris esset prorsus insensibilis. Atque hìc quidem illud accidit, quod in maxime convergentibus seriebus, ut bini priores termini ad magnitudinem quæsitam inveniendam abunde sufficiant.

193. Pro casu, in quo recta EG' esset satis proxima EK, vel etiam eandem transcurreret, facile esset vel ope Geometriæ, vel ope calculi finiti definire quantitatem illam AM' demendam ab AE, verum in eo casu solutio nullius est usus, ut infra patebit.

Si densitas nuclei sit perquam exigua, adhuc rem definiri posse.

194. Porro figura $BMtb$ abludit nonnihil ab ellipsi. Nam si ea esset ellipsis, uti est BAb, esset ut facile deducitur ex num. 174 tam Vt, quam VT proxime in ratione duplicata sinus anguli bCT, adeoque Vt, ut VT, & idcirco etiam Tt, ut VT. Est autem ex constructione Tt, ut VT^2, cum sit, ut tertia post CV constantem, & ipsam VT; adeoque decrescit versus polos multo minus, quam decresceret, si etiam t esset ad ellipsim. Sed quoniam tota Tt admodum exigua est ubique non solum respectu totius CV, sed etiam respectu VT; tota ejusmodi figura parum admodum ad ellipsi discrepabit, & curvaturam habebit ubique ad sensum eandem, ac illa; in casu autem nuclei rarioris ad circulum accedet magis.

Compensatione exigua, curva nova ab ludens ab ellipsi, sed parum.

195. Multo autem minus esset, ac prorsus insensibile id discrimen, ubi agitur de maris æstu, cui tota hæc theoria admodum facile aptari potest. Nam ibi tota elevatio AE, vix ad 10 pedes, sive duos passus assurgit; adeoque tertia post CE passuum 4300, & AE passuum 2, est $\frac{1}{2150}$ unius passus, quod est minus trigesima digiti parte, adeoque quæcumque sit densitas fluidi ambientis respectu densitatis nuclei solidi, elevatio in eo casu casu homogeneitatis nihil ad sensum discreparet.

Multo minus fore discrimen in maris æstu.

196. Oportet jam definire ellipticitatem AE in hac postrema hypothesi, in qua habetur massa fluida homogenea, attrahens in ratione reciproca duplicata distantiarum, massa in centro coacervata attrahens in ratione dire-

Investigatio ellipticitatis in postrema hypothesi directa distantiarum, & vis centrifuga. Eam determinabimus hoc pacto. Dicatur densitas fluidi t, densitas nuclei solidi, quem primo concepimus p, & sit $p-t=q$, quæ, nuclei globo redacto ad homogeneitatem cum fluido, erit densitas massæ in centrum abactæ. Dicatur autem semiaxis $CB=CE=r$, differentia $AE=x$, ac sit ratio vis centtifugæ ad gravitatem totalem in æquatore n ad m. Per hosce valores determinabimus vim in polo B, ac ejus differentiam a vi in æquatore in A, & cum vis in B ad vim in A debeat per num. 121 esse, ut est CA ad CB, erit CA, vel proximè CE ad EA in eadem ratione vis in B ad differentiam virium, quod ipsam AE determinabit.

Vis tota in superficie sphæroidis.

197. In primis vis tota puncti B in globum $BEbe$ radio $CB=r$, & densitate t, juxta num. 154 est $\frac{2}{3}ctr$, in materiam coadunatam in centro $\frac{2}{3}cqr$, in utrumque simul $\frac{2}{3}cpr$, & hæc postrema erit proxima vi toti puncti E in totam sphæroidem cum nucleo, quæ, ubi de tota gravitate agitur, non de differentiis, assumi poterit pro gravitate ubicunque in sphæroidis superficie.

Differentiæ tres vis in æquatore, & polo.

198. Porro ea tria habet discrimina a gravitate in A. Primo quidem vis, qua fertur A in totam sphæroidem fluidam homogeneam superat vim, qua fertur B in eandem, & est per num. 156, ut CA, vel proximè CE ad $\frac{1}{5}AE$, nimirum ut r ad $\frac{1}{5}x$, ita vis puncti B in sphæroidem $=\frac{2}{3}ctr$, ad ejus excessum supra vim in A, qui evadit $\frac{2}{15}ctx$. Deinde est ut $CE=CB=r$ ad $EA=x$, ita vis puncti B in massam in centro positam $=\frac{2}{3}cqr$ ad ejus defectum a vi puncti remotioris A in ipsam, qui evadit $=\frac{2}{3}cqx$. Demum est ut m ad n, ita gravitas illa primitiva $\frac{2}{3}cpr$ communis toti Telluris superficiei, ad vim centrifugam in $A=\frac{2cpnr}{3m}$, quæ in B est nulla.

Formula inde eruta pro ellipticitate.

199. Tota igitur differentia virium B, & A erit $\frac{2}{15}ctx-\frac{2}{3}cqx+\frac{2pcnr}{3m}$, & ratio vis in B ad ipsam erit $\frac{2}{3}cpr$ ad $\frac{2}{15}ctx-\frac{2}{3}cqx+\frac{2pcnr}{3m}$, sive dividendo per $\frac{2}{3}cp$ erit,

ut r ad $\frac{tx}{5p} - \frac{x}{p} + \frac{nr}{m}$, quæ cum esse debeat ratio CB ad EA, sive r ad x, erit $x = \frac{tx}{5p} - \frac{x}{p} + \frac{nr}{m}$, sive $x\left(1 - \frac{t}{5p} + \frac{q}{p}\right) = \frac{nr}{m}$. Posito autem $p - t$ pro q, est $- \frac{t}{5p} + \frac{q}{p} = - \frac{t}{5p} + \frac{p}{p} - \frac{t}{p} = 1 - \frac{6t}{5p}$. Erit igitur $x\left(2 - \frac{6t}{5p}\right) = \frac{nr}{m}$, ac proinde $x = \frac{nr}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$.

200. Hæc formula congruit penitus cum ea, quam exhibuit D'Alembertus in opusculo suo de ventorum causa, quod a Berolinensi Academia retulit præmium anno 1747, & cum alia multo generaliore, quam in opusculo de Telluris figura protulit Clerautius; pugnat autem cum iis, quæ Daniel Bernoullius protulit in dissertatione, quæ inter præmio donatas ab Academia Parisiensi habetur ad annum 1640. Continet itidem consectaria quædam, quæ prima fronte videntur paradoxa, & ipsius calculi, ac Geometriæ indoli contraria, sed si rite res expendatur, verissima sane sunt. *Consensus formulæ cum D'Alemberto, & Clerautio, dissensus a Bernoullio.*

201. Ut a Bernoullio ducamus exordium, is quidem pro hoc ipso casu nuclei solidi, & fluidi ambientis, ac una cum ipso circumacti in gyrum ejusmodi formulam proponit pro differentia semiaxis a semidiametro æquatoris, ut ipsa differentia sit reciproce proportionalis densitati fluidi; unde intulit æstum aeris atmosphæram elevare ad duo milliaria, quam elevationem in barometro non sentiri censuit ex eo, quod ob elasticitatem atmosphæra statim acquirat æquilibrium quoddam, quo fiat, ut quodcumque superficiei terrestris punctum sentiat medium totius atmosphæræ pondus. *Bernoullii formula, quid secum trahat.*

202. Porro id nostræ huic formulæ adversatur. Nam in ea si nucleus sit satis densus respectu fluidi ambientis, erit p numerus admodum ingens respectu t, adeoque fra- *Ejus dissensus a formula hic tradita.*

ctio $\frac{3t}{5p}$ perquam exigua, & tota formula æqualis quamproximè $\frac{nr}{2m}$, quæ attenuato in immensum fluido non solum non excrescet in immensum, sed potius decrescet, & in infinitum accedet ad valorem $\frac{nr}{2m}$.

Error Bernoullii detectus etiam a D' Alemberto: erroris fons.

203. Porro non nostra, sed Bernoullii formula a veritate aberrat. Id quidem in eodem illo suo opusculo notavit jam tum D'Alembertus ipse. Id ipsum autem & ego quidem in dissertatione de Maris æstu edita eodem anno demonstravi, ac originem erroris eundem protuli, quem eodem tempore D'Alembertus, quod nimirum in methodo canalium adhibita a Bernoullio non liceat considerare orbes sphæricos concentricos ut densitatis ejusdem. Nam si tota massa esset fluida, orbes diversæ densitatis ipsi etiam elliptici evaderent, cuius rei si habeatur ratio, multo minor elevatio requiritur in æquatore pro compensatione vis amissæ ob vim centrifugam, quam si hæc omnis jactura compensari deberet solo fluido ambiente nucleum, quo casu nimirum hujus fluidi altitudo deberet esse ipsius densitati reciproce proportionalis ad certam jacturam compensandam. Idcirco ego, ut methodum canalium tuto adhiberem, massam solidam prius ad homogeneitatem adduxi, amandata in centrum redundante materia, tum dissolvi. Et quidem evidentissimum est, si tanta in aere altitudinis mutatio haberetur, eam a barometro indicari debere, nec æquilibrium illud quidquam suffragari, ut ipse D'Alembertus notavit itidem. Nam æquilibrium requirit illud, ut quævis particula in omnes plagas æqualibus urgeatur viribus, non ut una urgeatur viribus iisdem, quibus alia alibi sita, veluti intra ipsam atmosphæram particula in summo monte posita minus premitur, quam in ima valle, licet utraque in æquilibrio sit.

204. D'Alem-

204. D'Alemberti formula habetur prop. 6 artic. 28, ubi cum sit ρ semidiameter nuclei, r semidiameter fluidi 1 ad n ratio diametri ad circumferentiam, δ densitas fluidi, Δ densitas nuclei, p gravitas ubicunque in superficie fluidi, φ vis centrifuga in æquatore, tota formula pro differentia semiaxis a semidiametro æquatoris est $\frac{\varphi r}{2p}$: $\left(1 - \frac{3n\delta r}{5(n\delta r - n\delta\rho + n\Delta\rho)}\right)$, quæ factis ρ, & r æqualibus ob altitudinem fluidi ad sensum nullam respectu nuclei solidi, evadit $\frac{\varphi r}{2p\left(1 - \frac{3\delta}{5\Delta}\right)}$. Est autem hìc mihi $\frac{n}{m}$, c, $\frac{t}{p}$, quod ipsi $\frac{\varphi}{p}$, $2n$, $\frac{\delta}{\Delta}$, quibus valoribus substitutis migrat illa in ipsam meam $\frac{nr}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$.

D'Alemberti formula, & ejus reductio ad hìc traditam.

205. Considerentur jam diversæ relationes densitatum t, & p. Si densitas nuclei est immensa respectu densitatis fluidi, evanescit fractio $\frac{3t}{5p}$, & formula evadit $\frac{nr}{2m}$, quæ, imminuto valore p respectu t, perpetuo crescit donec $\frac{3t}{5p}$ unitate est minor, cum totus divisor perpetuo decrescat, ac ubi demum evadit $p = t$, formula evadit $\frac{nr}{2m\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{5nr}{4m}$ ut supra vidimus, ac est valor in casu infinitæ densitatis nuclei ad valorem in casu homogeneitatis, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{5}{4}$, sive ut 2 ad 5. Atque hi casus intermedii omnes pertinent ad fluidum homogeneum, cujus particulæ se attrahant in ratione reciproca duplicata distantiarum una cum massa in centro posita, & exercente vim attractivam in ratione directa simplici distantiarum, ac reducuntur ad massam in centro positam, & attrahentem in ratione reci-

Diversi casus diversæ densitatis nuclei respectu fluidi. Quid ubi ea major, & æqualis.

proca duplicata distantiarum, adeoque ad nucleum solidum æquè densum paribus a centro distantiis, sed mediæ densitatis majoris densitate fluidi, & præditum vi mutua attractiva eâdem, qua fluidum, per illud additamentum *AM*, *Tt*. In iis autem casibus omnibus solutio ritè procedit, si vis centrifuga respectu gravitatis sit exigua, cum exiguus evadat valor formulæ respectu r, sive elevatio exigua, uti suppositum est in eruenda formula ipsa, computando ex hac hypothesi differentiam attractionis in æquatore, & polo.

Quid, ubi minor, sed in ratione majore quam 3 ad 5, vel in ea ratione, vel in proxima ipsi, quo casu formulæ valor in immensũ excrescit.

206. Si jam sit nucleus minus densus, quam fluidum, præter sphæroidem fluidi homogenei, concipitur in centro massa repulsiva, æquivalens materiæ, quæ fluido additur, ut ad homogeneitatem reducatur. Sed adhuc valor formulæ remanet positivus, donec p ad t, sive densitas solidi ad densitatem fluidi est in ratione majore, quam 3 ad 5, ac perpetuo crescit, & cum adhuc distantia ab ea ratione est tanta, ut $1 - \frac{3t}{5p}$, sive $\frac{5p-3t}{p}$, sit fractio multo minor, quam $\frac{m}{2n}$, ellipticitas exigua est, & formula ritè procedit. At ubi ad eam rationem nimis acceditur, jam formulæ valor in immensum excrescit, qui deinde etiam in negativum transit. Circa hosce limites formula jam accurata esse non potest, cum eruta sit ex hypothesi exiguæ excentricitatis tam differentia attractionum in æquatore, & in axe, quam differentia vis repulsivæ pertinentis ad massam in centro positam.

Qua ratione solvi posset problema ellipticitate nimis aucta.

207. Si generaliter assumeretur in ellipsoide utcunque compressâ, vel productâ accurata ratio vis in polo ad vim in æquatore per semiaxes ellipseos genitricis, quod Mac-Laurinus præstitit, & vis illa repulsiva proportionalis distantiæ itidem accuratè exprimeretur per easdem, ac ratio vis centrifugæ sub æquatore ad ipsam, quæ constans est; haberetur accurata expressio vis totius in æquatore, ad vim in polo per functiones semiaxium, in qua

in qua ratione reciproca si ponetentur ipsi semiaxes, haberetur æquatio ad semiaxes ipsos accuratè eruendos, & constructio generalis accurata problematis cum ingenti semiaxium inæqualitate. Tum forma inventa corrigenda esset methodo exposita a num. 183 addendo, vel demendo AM, vel AM' respondentem trilineo LGI, vel $L'G'I'$. Sed jam additamentum AM, Tt, non ita exiguum esset, ut nova correctio negligi posset. Verum ii casus ad rem nostram non faciunt, cum Tellurem videamus proxime sphæricam ellipticitate perquam exigua.

208. Ubi ratio p ad t est adhuc minor, quam 3 ad 5, tum valor formulæ jam est negativus, & indicat æquilibrium haberi non posse in sphæroide compressa ad polos, sed in producta. Et quidem, ubi non ita multum receditur ab illa ratione, jam valor formulæ evadit exiguus, & formula ipsa non erronea. Nam si ratio sit 3 ad 6 erit $\frac{3t}{5p} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$, ac valor formulæ $-\frac{5nr}{2m}$ satis exiguus. Is deinde valor perpetuo decrescit, decrescente densitate nuclei, donec ea evanescente, & nucleo prorsus vacuo, evadat $1 - \frac{3t}{5p}$ valor infinitus, adeoque totius formulæ valor $= 0$.

Valor negativus ubi ratio minor quam 3 ad 5, & productio ad polos.

209. Jam vero hìc se statim objiciunt quædam, quæ prima fronte videntur paradoxa, & penitus absurda. Et primo quidem illud consequitur, minima etiam, & prorsus insensibili vi centrifuga, sive rotatione etiam, quæ mille annis vix absolvatur, posse admodum sensibilem haberi compressionem. Utcumque enim sit exiguus valor n respectu m, si $3t$ satis proximè accedat ad $5p$, tota formula satis magnum habebit valorem. Comprimetur igitur fluidum motu usque adeo insensibili compressione satis magna, quæ alicubi etiam prope ejusmodi rationem in infinitum excrescet. Utut enim formula eruta ex hypothesi compressionis exiguæ erronea esse possit in casu compressionis ingentis, ut adeo transitus per infinitum fieri

Minima vi centrifuga posse haberi magnâ elevationem, ubi ratio sit proximæ rationi 3 ad 5.

fieri possit extra eum locum, quem formula ipsa indicat; adhuc tamen non potest valor, qui crescendo transit in negativum, non transire alicubi per infinitum. Nullus autem erit limes, ultra quem exiguus esse non possit motus, & vis centrifuga, cum compressione ingenti. Porro videtur evidens per sese, vim centrifugam adeo exiguam nihil ad sensum debere deflectere directionem gravitatis, & nihil ad sensum turbare sphæricæ figuræ æquilibrium. Turbat tamen, & ubi parum admodum coegerit a sphærica figura racedere in casu valoris negativi, crescente inæqualitate gravitatis in polo, & in æquatore semper magis, & crescente in æquatore vi repulsiva materiæ in centro collocatæ, habebitur nova elevationis ulterioris causa, & elevatio initio semper major, serie quadam continuo crescente, donec, ubi formulæ valor est positivus, deveniatur ad æquilibrium, & ubi est negativus, fugiat fluidum in infinitum æquilibrio nusquam invento, & nusquam revocatum.

Quo pacto haberi possit æquilibrium in sphæroide producta ad polos, licet habeatur in æquatore vis centrifuga.

210. Alterum paradoxum est illud, quod si densitas fluidi sit multo major densitate nuclei, debeat cum motu circa suum axem id fluidum conjungere productionem ad polos, & depressionem ad æquatorem. Videtur autem quæcumque sit densitatum ratio, in sphæroide producta ad polos nec æquilibrium canalium, nec directionem superficiei perpendicularem haberi posse: & tamen id ipsum omnino consequitur. Erit nimirum quædam determinata productio ad polos, quæ æquilibrium admittet. Id autem idcirco accidet, quod in sphæroide producta vis in axe est minor quamvis in æquatore juxta num. 156. Præterea massa illa in centro posita repellens in ratione directa simplici distantiarum, cum repellat æque canales æquales, repellet præterea magis fluidum in canali tendente ad polum, ut pote longiore, quam in canali tendente ad æquatorem, & id quidem excessu respondente excessui longitudinis. Hinc fieri potest, ut vis centrifuga respondens canali tendenti ad æquatorem

compenſet accuratè illla bina capita, ex quibus vis in canali tendente ad polum minuitur. Atque id ipſum accidit in caſu formulæ abeuntis in negativam, ut facta demonſtratione pro eo caſu, facile etiam immediate demonſtratur.

211. Verum in eo caſu notandum maxime illud, quod fluidum ſine ulla vi centrifuga collocatum in figura ſphærica eſſet etiam prorſus in æquilibrio. Accedente converſione, pondus in canali tendente ad æquatorem decreſcet, & idcirco fluidum ibi elevabitur, & deprimetur ad polos. At quo magis mutabitur figura, eo magis ab æqualitate recedent binorum canalium pondera, viribus ſingularum particularum majorem habentibus inæqualitatem vis, quam ut ulla inæqualitate longitudinum compenſari poſſit. Adeoque non abibit in eam figuram, quam requirit æquilibrium, nimirum productam ad polos, ſed ab ea in infinitum recedet, & demum diſſolvetur fluidum ipſum, ac vi repulſiva e centro, & vi centrifuga e converſione perpetuo prævalentibus vi attractionis in ſphæroidem, abibit in infinitum. In eo caſu fluidū conſtitutum extra eum æquilibrii ſtatum receſſurū ab eodem magis.

212. Hinc ad habendum æquilibrium in eo caſu, oportet habeat immediate illam figuram productam ad polos quæ cum ipſo æquilibrio conjungitur. Eam ſi accipiat, retinebit. At ſi eam amittat & utcumque paullo minorem compreſſionem acquirat, non regredietur, ſed perpetuo magis recedet ab ea figura ipſa. In minori enim diſtantia a ſphæra, canalis tendens ad polum minus amittet ponderis, quam canalis tendens ad æquatorem, in quo idcirco fluidi altitudo perpetuo augebitur, & per id ipſum aucta ſemper magis inæqualitate, ſemper productio fiet minor, tum fiet tranſitus ad compreſſionem in polo, & elevationem in æquatore, quæ itidem in infinitum augebitur. Atque itidem cenſeo, piget enim diutius in iis immorari, ubi caſu aliquo elevetur magis fluidum in polis, quam æquilibrium requirat, inæqualitatem pariter augeri debere magis, & fluidum ab æquilibrio ſemper magis recedere. Conſtitui deberet in eo ſtatu, ut æquilibrium habeat, ſed ipſum minimo motu amiſſurum.

Idem ibi accidere quod in Autoris theoria in limite non cohæsionis.

213. Nimirum id ipsum ibi accidet, quod in mea theoria physicæ generalis punctorum indivisibilium, quæ certa lege pro certis distantiis se mutuo repellunt, pro aliis attrahunt. In ipso transitu a vi repulsiva ad attractivam, crescentibus distantiis, eum limitem, in quo fit is transitus, appello limitem cohæsionis, eum vero, in quo crescente distantia fit transitus e contrario a vi attractiva ad repulsivam, dico limitem non cohæsionis, & primi quidem generis limites ubi bina puncta habuerint, servant ita, ut inde per vim demota, se restituant; secundi autem generis limites servant quidem, sed vel tantillum inde dimota, recedunt per se magis, & eum limitem fugiunt. Ita & hic fluidum tuetur id æquilibrium, quod habet in casu valoris positivi formulæ, & inde dimotum eo se sponte restituit, at e contrario si agatur de æquilibrio, quem negativa formula exhibet, ipsum a fluido facile admodum amittitur quovis utcumque exiguo motu, & amissum non recuperatur, sed perpetuo magis ab eo receditur. Quamobrem id æquilibrii genus videtur omnino ineptum ad figuram Telluris vel per diurnam rotationem, vel in maris æstu acquirendam.

Aptior Clerautii theoria nuclei elliptici ad explicandam, si oporteat productionem.

214. Atque eam ipsam ob causam si Terra cum rotatione diurna conjungeret productionem ad polos, aptior sane esset Clerautii theoria, qui nucleum solidum figuræ productæ concipit, cui affusum fluidum accipiat deinde formam productam itidem, sed minus, quamquam eum videtur innuere D' Alembertus, ubi detecta productione fluidi cum æquilibrio per nucleum sphæricum, sed minus densum, concludit, eo pacto haberi posse productionem ejusmodi, etiam sine solido nucleo producto. Nam Clerautius ipse ejusmodi generalem formulam proposuerat pro figura fluidi affusi nucleo elliptico, quæ in casu nuclei sphærici, & exiguæ altitudinis fluidi reducitur ad illam ipsam D' Alemberti formulam, & meam, quæ, nucleo minus denso respectu fluidi quam in ratione 3 ad 5, negativum valorem exhibet, & productionem indicat.

215.

215. Habet ipse in opere de figura Telluris edito anno 1743 generalem formulam §. 31 partis 2 pro ellipticitate sphæronidis, in quam componitur fluidum, quod ambiat nucleum solidum ellipticum densitatis homogeneæ, sed discrepantis a densitate nuclei. Est ipsi semidiameter figuræ fluidi 1, figuræ nuclei a, elleptícitas hujus, sive excessus semidiametri æquatoris supra semiaxem divisus per ipsam semidiametrum æquatoris α, densitas fluidi 1, densitas nuclei $1+f$, ratio vis centrifugæ in æquatore ad gravitatem ibidem φ. Evadit autem formula generalis pro ellipticitate ipsius fluidi, $\frac{6a^5f\alpha+5a^3f\varphi+5\varphi}{10a^3f+4}$. Formula Clerautii.

216. Pro nucleo sphærico fit $\alpha=0$, & primus numeratoris terminus evanescit. Pro exigua fluidi altitudine fit $a=1$, adeoque formula evadit $\frac{5f\varphi+5\varphi}{10f+4}$. In ea ponatur $\frac{\varphi}{p}$ pro φ, & $\frac{\Delta}{\delta}$ pro $\frac{1+f}{1}$, sive $\frac{\Delta}{\delta}-1$ pro f, r pro 1, qui sunt valores correspondentes apud D'Alembertum, ac evadit numerator $\frac{\varphi r}{p}\left(\frac{5\Delta}{\delta}-5+5\right)=\frac{\varphi r}{p}\times\frac{5\Delta}{\delta}$, denominator $\frac{10\Delta}{\delta}-6$, adeoque valor formulæ $\frac{\varphi r}{p}\times\frac{5\Delta}{10\Delta-6\delta}$ $=\frac{\varphi r}{p}\times\frac{1}{2-\frac{6\delta}{5\Delta}}=\frac{\varphi r}{2p\left(1-\frac{3\delta}{5\Delta}\right)}$, prorsus ut apud D' Alembertum, & apud me. Ejus reductio ad D'Alembertianam, & hic traditam.

217. Hypothesis nuclei elliptici non modo utilis est ad conciliandam productionem ad polos cum rotatione, sed etiam ad conciliandam cum eadem quamcumque compressionis magnitudinem, & quamcumque absolutam differentiam gravitatis in diversis latitudinibus. Quamobrem in eam nunc Geometriæ itidem ope juxta instituti mei rationem inquirendum esset. Verum quoniam Hypothesis nuclei elliptici, & aliarum figurarum ejusdem cur hic omissa. In hypothesibus hic expositis, quæ ratio incrementi gravitatis. Tab.4, F.21.

ut infra videbimus, longitudini pendulorum ſatisfacit nucleus etiam ſphæricus, graduum autem ſeries ellipſim reſpuit, & irregularitatem præſefert, ab ea hic perquiſitione abſtinebo, & agam de diſcrimine gravitatis in hypotheſibus hucuſque expoſitis. Si fluidum homogeneum eſt cum nucleo, erit per num. 174 incrementum gravitatis ab æquatore ad polos, ut quadratum ſinus latitudinis, atque id ipſum accidet in caſu heterogeneitatis. Habetur enim generaliter illud: ſi quantitas quævis D parum mutetur, mutatio potentiæ D^m erit potentia mD^{m-1} ducta in ejus mutationem, adeoque ob D ad ſenſum conſtantem mutatio ipſius potentiæ ſequetur rationem eandem, ac mutatio quantitatis ſimplicis. Porro in ſecunda hypotheſi, quæ ellipſim accuratam requirit, vis tota in ſuperficie eſt per num. 134, ut normalis, ſive reciproce, ut perpendiculum e centro in tangentem, nimirum quamproxime reciprocè, ut diſtantia. Sola autem vis in maſſam in centro poſitam in ea hypotheſi eſt directè, ut diſtantia, & ei in prima hypotheſi ſuccedit vis reciproca quadrato diſtantiæ. Quare omnium earum virium mutatio eſt, ut mutatio diſtantiæ, nimirum ut quadratum ſinus latitudinis. Habetur igitur in ſecunda hypotheſi ea ratio, & in prima itidem additamenta vero illa perquam exigua AM, Tt rem nihil ad ſenſum turbant.

Formula pro exceſſu gravitatis in polo, & in quovis loco ſupra gravitatem in æquatore in caſu homogeneitatis nuclei, & fluidi.

218. Diſcrimen binorum caſuum homogeneitatis, & heterogeneitatis erit in abſoluta differentia gravitatis in æquatore a gravitate in polis. Gravitas primitiva in æquatore ad ejus defectum a gravitate in polo ſphæroidis compreſſæ in caſu homogeneitatis erit juxta num. 155 ut CA, vel proximè CE ad $\frac{1}{5}$ AE. Sit igitur $CE = r$, $AE = x$, gravitas abſoluta in æquatore m, vis centrifuga n, & erit differentia virium in æquatore, & polo $\frac{mx}{5r} + n$; erit autem juxta num. 158 $x = \frac{5nr}{4m}$. Quare erit ea differentia $\frac{1}{4} n + n = \frac{5}{4} n$. Quod ſi ſinus latitudinis dicatur

catur s ad radium $= 1$, erit ipſius quadrato proportionalis exceſſus gravitatis in quovis loco ſupra gravitatem in æquatore, adeoque erit $\frac{5}{4} ns^2$ in hac hypotheſi homogeneitatis exceſſus gravitatisin loco quovis, ſupra gravitatem in polo.

219. Quod ſi orbes diverſi etherogenei ſint, & maſſa in centro collecta agat in ſecunda hypotheſi in ratione directa diſtantiarum, ſit ad maſſam reliquam, quemadmodum & ſupra poſuimus, ut q ad t, ac $t + q = p$, erit per num. 199, ut r ad $\frac{tx}{5p} - \frac{qx}{p} + \frac{rn}{m}$, vel poſito $p - t$ pro q, ut r ad $\frac{tx}{5p} - x + \frac{tx}{p} + \frac{nr}{m} = \frac{6tx}{5p} - x + \frac{nr}{m}$, ita gravitas m ad differentiam gravitatis $= \frac{6mtx}{5pr} - \frac{mx}{r} + n$. Eſt autem $x = \frac{nr}{2m(1 - \frac{3t}{5p})}$ per num. 199. Igitur poſito pro x hoc valore, erit differentia gravitatis $\frac{3tn}{5p(1 - \frac{3t}{5p})} - \frac{tn}{2(1 - \frac{3t}{5p})} + n$, ſive $\frac{6tn}{10p - 6t} - \frac{5pn}{10p - 6t} + \frac{10pn - 6tn}{10p - 6t} = \frac{5pn}{10p - 6t} = \frac{n}{2(1 - \frac{3t}{5p})}$, ubi ratio t ad p eſt ratio denſitatis noſtrorum marium ad mediam denſitatem Telluris. Formula pro eodem in caſu cujuſcumque denſitatis nuclei pro ſecunda hypotheſi.

220. At in prima hypotheſi, in qua maſſa in centro collecta agit in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, differentia virium erit major. Nam e tribus differentiis virium, quas ſuperiore numero deſumpſimus ex num. 199 ad primam illam proportionem, prima $\frac{tx}{5p}$, quæ agit in ſphæroidem homogeneam, & tertia, quæ pertinet ad vim centrifugam, manent in regreſſu, a ſecunda hypotheſi ad primam: ſecunda $-\frac{qx}{p}$, quæ pertinet ad maſſam in cen- Formula pro prima.

tro collectam, & exprimitur in fig. 21 a lineola HI, mutatur in $\frac{2qx}{p}$, quam ibidem exprimit lineola HL priori contraria, & ejus dupla. Quamobrem satis erit a superiore formula differentiæ $\frac{5pn}{10p-6t}$ auferre $-\frac{mqx}{rp}$, & ipsi addere $\frac{2mqx}{rp}$, sive ipsi addere $\frac{3mqx}{rp}$, ut habeatur formula pro prima hypothesi. Est autem $\frac{5pn}{10p-6t}=\frac{5n}{2}\times\frac{p}{5p-3t}$, & ob $x=\frac{nr}{2m(1-\frac{3t}{5p})}$, sive $\frac{5pnr}{2m(5p-3t)}$, est $\frac{3mqx}{rp}=\frac{3q}{p}\times\frac{5pn}{2(5p-3t)}=\frac{5n}{2}\times\frac{3q}{5p-3t}=\frac{5n}{2}\times\frac{3p-3t}{5p-3t}$. Quare tota hujusmodi formula jam erit $\frac{5n}{2}\times\frac{4p-3t}{5p-3t}$.

Theorema elegans inde deductum.

221. At hìc oritur elegantissimum theorema, quod longe alia methodo invenit Clerautius, & quod elegantiorem adhuc exhibet nexum quendam inter binas hasce meas hypotheses, quæ, quod pertinet ad figuram, æquipollent, in gravitatis autem absoluta differentia plurimum discrepant. Assumatur nimirum differentiæ inventæ ratio ad gravitatem totam m, sive $\frac{5n}{2m}\times\frac{4p-3t}{5p-3t}$, & illi addatur ellipticitas $\frac{x}{r}$, sive $\frac{5pn}{2m(5p-3t)}$, nimirum $\frac{5n}{2m}\times\frac{p}{5p-3t}$ & habebitur $\frac{5n}{2m}\times\frac{5p-3t}{5p-3t}=\frac{5n}{2m}$. Est autem, ut vidimus, $\frac{5n}{4m}$ ellipticitas in casu homogeneitatis. Quare dupla ellipticitas in casu homogeneitatis æquatur fractioni, quæ exprimit rationem differentiæ gravitatum in æquatore, & polo ad gravitatem totam, ac ellipticitati, quæ habetur, si Tellus paribus a centro distantiis homogenea sit;

& hæc

& hæc habetur si illa ratio auferatur a dupla ellipticitate in casu homogeneitatis, nimirum ab $\frac{1}{115}$; nam ea ellipticitas est per num. 159 respectu semiaxis $\frac{1}{230}$, & ejus duplum $\frac{1}{115}$.

222. Porro in prima mea hypothesi ellipticitas debet esse ipsa illa differentia gravitatum divisa per totam gravitatem, cum per num. 121 sint vires in verticibus semiaxium reciprocè proportionales ipsis semiaxibus, licet alia esset ipsius differentiæ gravitatis expressio per densitates. Quare si hanc ellipticitatem, quam differentia gravitatum per observationes definita vocemus ellipticitatem secundæ hypothescas, primam autem, quæ nucleo paribus a centro distantiis equè denso respondet, vocemus ellipticitatem hypothescos primæ, habebitur hoc elegans theorema. *Ellipticitas in casu homogeneitatis est media arithmeticè proportionalis inter ellipticitates earum binarum hypothesium*. Aliud inde profluens.

223. Patet autem jam & illud, licere per observationes pendulorum factas in diversis Terræ locis inquirere in figuram Telluris, & in ipsam gravitatis primitivæ naturam, posito, quod Tellus paribus a centro distantiis sit homogenea. Nam in primis pendulorum isochronorum longitudo est, ut gravitas. Quare si pendulorum ejusmodi incrementa ab æquatore ad polos non sint, ut quadrata sinuum latitudinis; vel Newtoniana gravitatis lex non est accurata, vel Tellus non est homogenea, nec orbes concentrici homogenei sunt, nec gravitas dirigitur ad datum centrum ita, ut sit constans, vel in ratione distantiæ a centro, in quibus hypothesibus deberent ea incrementa ejusmodi rationem sequi. Quæ fieri jam possint perquisitiones ope pendulorum isochronorum.

224. Si ejusmodi rationem sequantur, & Telluris orbes concentrici homogenei sint, ac gravitate Newtoniana præditi, & binæ habeantur observationes pendulorum, altera sub æquatore, altera in loco satis remoto, facile inde eruetur ellipticitas methodo exposita num. 220. Fiat ut quadratum sinus latitudinis ejus loci ad quadratum radii, vel ut dimidium sinus versi latitudinis duplicatæ ad radium, Ratio ellipticitatis eruendæ.

dium, ita differentia longitudinis penduli in loco dato a longitudine penduli sub æquatore ad quartum, & habebitur differentia longitudinis penduli in polo, cum radius sit sinus latitudinis 90°, & diameter sinus versus ejus dupli. Hæc differentia dividatur per longitudinem penduli totam, & habebitur ellipticitas in secunda hypothesi. Hujusmodi ellipticitas auferatur ab $\frac{1}{115}$, & habebitur quæsita ellipticitas pro casu Telluris paribus a centro distantiis homogeneæ, & gravitate Newtoniana præditæ.

Formula pro ratione densitatũ.

225. Poterit etiam definiri ratio densitatum per ipsas pendulorum longitudines observatas ope formulæ $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$, quæ exhibet differentiam gravitatis in æquatore, & polo. Si differentia pendulorum inventa pro iis binis locis dicatur h, & longitudo tota l, erit $\frac{5n}{2m} \times \frac{4p-3t}{5p-3t} = \frac{h}{l}$. Quare $\frac{4p-3t}{5p-3t} = \frac{2mh}{5nl}$, sive $20mpl - 15ntl = 10mph - 6mth$, vel $20npl - 10mph = 15ntl - 6mth$. Quare demum $\frac{t}{p} = \frac{20nl - 10mh}{15nl - 6mh}$, quæ quidem formula evadit 1, nucleo eandem habente densitatem cum solido, si fuerit $20nl - 10mh = 15nl - 6mh$, sive $5nl = 4mh$, sive $\frac{h}{l} = \frac{5n}{4m}$, quæ in eo casu est ellipticitas, & ratio differentiæ gravitatum ad gravitatem.

Crescente densitate versus centrum, differentia gravitatum major, ellipticitas minor.

226. Porro facile deducitur & illud, in sphæroide parum compressa, si differentia gravitatum sit major, quam $\frac{1}{230}$ totius, quam differentiam requirit homogeneitas, densitatem versus centrum in prima hypothesi fore majorem, ellipticitate vero minorem. Nam in formula $\frac{2m}{5n} \times \frac{4p-3t}{5p-3t}$, erit $5p$ multo major terminus, quam $3t$, adeoque & $4p-3t$ terminus positivus. Crescente p, crescet numerator, & denominator, sed ob idem $3t$ utrique ablatum, ratio illius ad hunc crescet, adeoque crescet etiam ratio differentiæ gravitatis ad totam gravitatem,

quam

quam exprimit ea formula, & ea ablata ab $\frac{1}{115}$ decrescet ellipticitas.

227. Quod si incrementum longitudinis penduli non sit, ut quadratum sinuum latitudinis, sed in quavis ratione mutetur ab æquatore ad polum, poterit inveniri lex gravitatis directæ ad centrum, quæ satisfaciat ei mutationi; quod quidem admodum facile præstabitur in fig. 2, si vis centrifuga in æquatore sit satis exigua respectu gravitatis ibidem in eo sensu, quem exposui numero 73. Facto enim quovis angulo *FRB*, & assumpta *FK* ad *FC*, ut est $\frac{1}{2}$ *Fr* ad *FV*, ductâque *Ks* parallela *FV*, quæ occurrat in *s* rectæ *Cr*, satis erit assumere *sQ* ad *RV*, ut est longitudo penduli, seu gravitas sub æquatore, ad longitudinem penduli, seu gravitatem in latitudine proxime æquali angulo *FRB*. Ductâ enim curvâ per omnia puncta *Q*, habebitur lex gravitatis, quæ datam ejus mutationem exhibeat. Verum & hìc compressio erit ad semidiametrum æquatoris, ut dimidia vis centrifuga in æquatore ad gravitatem ibidem, & decrementum distantiæ erit proxime, ut quadratum sinus latitudinis.

Incrementa utcumque irregularia posse conciliari cum vi quadam tendente ad centrum.

228. In omnibus autem hisce casibus debebit & gravitas primitiva, & residua in eadem latitudine, longitudinibus locorum utcumque mutatis, esse eadem, cum debeat figura fluidi esse sphærois orta ex conversione curvæ cujusdam circa proprium axem, parallelis omnibus existentibus accurate circulis, & vi gravitatis in iis omnibus accurate æquali. Si autem in diversis longitudinibus, & eâdem latitudine inveniatur diversa gravitas, tum vero gravitas primitiva omnino non poterit dirigi ad idem unicum centrum, poterit autem sæpe ejusmodi etiam inæqualitas conciliari cum æquilibrio in hypothesi attractionis, dummodo densitas in iisdem etiam a centro distantiis sit diversa certâ quadam lege, vel prorsus irregulariter, prout ipsa gravitas certâ quadam lege, vel omnino irregulariter diversa erit in diversis longitudinibus, vel latitudinibus locorum.

Quid cum ejusmodi vi conciliari non possit, possit cum gravitate Newtoniana.

229. Et quidem inæqualitas hæc densitatum satis ma- longe

Alia, quorum hìc tractatio omittitur.

gna in iisdem etiam distantiis, si assumatur certis quibusdam legibus, ut & si nucleus certis quibusdam figuris præditus sit; figuræ Telluris, & mutationes gravitatis longe aliæ obvenient, & infinitum esset ea persequi, quorum deinde applicatio ad Naturam esset nulla sine hypothesibus prorsus arbitrariis, & confictis. Quamobrem ego ea etiam omnia omittam, & addam tantummodo nonnulla, quæ pertinent ad inæqualitates quasdam densitatis, & figuræ irregularitates, quas est admodum probabile existere in Natura, & quæ tam hic, quam in sequenti capite nobis usui futura sunt.

Deviatio penduli quiescentis, & incrementum gravitatis ex globo unius milliarii imposito superficiei Terræ ad latus. Tab. 4. Fig. 22.

230. Sit in fig. 22 Tellus *BAD* figuræ sphæricæ, & paribus centro distantiis homogenea. Sit autem in ipsa ejus superficie globus *E*, cujus semidiameter sit unius milliaris, Geographici, qualium 60 gradum medium circuli maximi complent. Pondus ex *F* suspensum sine ejusmodi globo imposito dirigeretur per rectam *FG* tendentem ad Terræ centrum *C*. Sed vi globi deflectet per *FI* ita, ut, ducta *IG* perpendiculari ad *FC* sit, ea ad *FG*, ut est vis in globum ad vim in Terram. Est autem ejusmodi ratio eadem ex Newtoni demonstratis, ac ratio semidiametri globi ad semidiametrum Terræ. Quare hinc duo deduci possunt: primo quidem deduci potest angulus *IFG* deviationis penduli, secundo incrementum gravitatis *FI* supra *FG*.

Deviatio penduli calculo inde eruta.

231. Quod ad primum pertinet, erit, ut semidiameter Terræ, quæ quidem est ejusmodi milliariorum proxime 3438, ad semidiametrum globi *E* unius milliarii, ita *FG* ad *GI*, sive ita radius 100000 ad tangentem anguli quæsiti *GFI*, quæ evadit 29 quamproximè, nimirum tangens unius minuti primi. Quamobrem ejusmodi massa detorquet pendulum angulo minuti unius; globus autem major, vel minor magis, vel minus densus, sed exiguus respectu totius Telluris, ut nimirum deviatio exigua sit proportionalis suæ tangenti, detorquebit pendulum magis, vel minus in ratione diametri, vel densitatis auctæ, vel imminutæ, ac in majori distantia a globo minore minus in ratione reciproca duplicata distantiæ ab ejus centro.

232. In-

232. Incrementum autem gravitatis ad gravitatem totam erit, ut *FG* ad ejus differentiam ab *FI*, quæ differentia juxta ea, quæ demonstrata sunt opusculo 4 n. 349 est proxime tertia post duplam *FG*, & *GI*, sive $\frac{29 \times 29}{200000} = \frac{841}{200000}$, minor, quam $\frac{1}{200}$. Quare gravitas ad incrementum erit in ratione majore, quam sit 100000 ad $\frac{1}{200}$, sive 20000000 ad 1; unde patet id incrementum insensibile prorsus esse. Incrementum gravitatis nullum ad sensum.

233. At si is globus esset infra *G* ita, ut jaceret in recta *FC*, ut nimirum si infra superficiem sit, ubi densitas per id intervallum sit tanto major, tum deviatio penduli esset nulla, & incrementum gravitatis ad gravitatem totam esset, ut 1 ad 3438. Id incrementum in pendulo oscillante ad singula minuta secunda non est prorsus insensibile. Nam juxta num. 68 penduli longitudo, ubi minima est sub æquatore, est minus, quam linearum 440, adeoque plusquam octava lineæ parte pendulum ipsum contraheret, ac massa octuplo densior, vel octuplo majorem habens semidiametrum infra superficiem delitescens, & reliquæ Telluri immixta pendulum per unam lineam contraheret. Si globus sit infra superficiem, deviatio nulla incrementum $\frac{1}{8}$ lineæ.

234. Globus a positione *A* ad positionem *E* perpetuo delatus per circuli quadrantem primum effectum parit perpetuo majorem, secundum perpetuo minorem, qui tamen eos effectus præstat in pendulis sibi proximis; nam in pendulo etiam solis decem passuum millibus remoto præstare debet effectum decies decuplo, sive centuplo minorem. Illud autem omnino patet, si is globus sit superficiei proximus infra ipsam situs, pendulum autem non ipsi immineat, sed ad latus sit, vix quidquam debere augere vim gravitatis, sed debere adhuc multum deflectere pendulum. Præterea idem præstare cavitatem aliquam, quæ sit superficiei Telluris proxima, in contrariam par- Quid in intermediis positionibus globi: quid in aliqua distantia in superficie: quid alte infra ipsam: quid cavitas.

tem, cum ex ea parte desit materia, & vis gravitatis ex ea parte sit minor, quam esset sine ejusmodi cavitate. Quod si globus multo altius demersus sit infra superficiem, pondus in *C* situm necessario trahet multo obliquius, adeoque magis augebit gravitatem, quam possit detorquere ejus directionem, sed ut eundem effectum præstet debebit habere, vel diametrum, vel densitatem majorem in ratione duplicata distantiæ centri auctæ, cum in ea ratione inversa vis singularum particularum decrescat.

Multo minus turbari eodem globo, ubi is maxime turbat, longitudinem penduli oscillantis, graduum mensuram.

235. Illud etiam colligitur facile, incrementum gravitatis, quo penduli oscillantis ad singula secunda augetur longitudo in situ sibi maximè favente, multo minus debere turbare seriem longitudinum eorum pendulorum, quam deviatio penduli quiescentis in situ sibi maximè favente turbet seriem graduum. Nam ea massa, quæ pendulum prius octava lineæ parte producit, adeoque cum id sit linearum proxime 439, ipsum mutat minus, quam $\frac{1}{3500}$ sui parte, eadem penduli deviationem parit unius minuti, quæ ubi unicum gradum dimetimur, inducit in eum errorem, qui est pars sexagesima totius gradus, nimirum hexapedarum proxime 950, multo majorem toto discrimine invento inter gradus remotissimos; ubi autem dimetimur gradus tres simul, adhuc inducit errorem $\frac{1}{180}$ partis, sive hexapedarum plusquam 310 adhuc immanem.

Quid ex majore, vel minore densitate versus cétrum: quid ex eadem versus æquatorem in superficie.

236. Notandum autem & illud, quod per sese patet, omnia hujusmodi incommoda multo minora esse, si Tellus versus centrum sit multo densior, sed etiam esse multo majora, si ea rarior sit, vel etiam vacuo nucleo constet. Si prope superficiem sit multo densior versus polos, quam versus æquatorem, patet ex hisce, quæ hìc demonstravimus, gravitatem debere esse minorem ad æquatorem etiam ex eo capite, & densitas duplo major ad polos per altitudinem milliariorum 8 pareret per se sola discrimen unius lineæ in longitudine penduli oscillantis ad singula secunda.

237.

237. Newtonus censuit prope æquatorem debere densitatem esse potius majorem in partibus nimirum a Sole quodammodo veluti tostis. Ego contra, cum tam multa corpora dilatentur caloris vi, & vi frigoris adstringantur, opinor debere potius rariora ibi esse corpopora ob id ipsum. Sed externi caloris, & frigoris vis ad tantam altitudinem infra superficiem non pertingit, ut effectum sensibilem edat in partem utramlibet.

Densitatem versus æquatorem debere potius esse minorem.

238. Videtur majorem in internis partibus densitatem significare illa Condaminii, ac Bouguerii observatio, qua attractionem montis ingentis Americani invenerunt 7 secundorum, ita nimirum exiguam, & quadrante ita exiguo, ut sub sensum vix cadat, quæ in tanta molis monte debuisset esse multo major, si ejus densitas densitati mediæ Telluris par extitisset. Verum montes quidem plerique, ut ego arbitror, effecti sunt intumescentibus interni caloris vi stratis superficiei proximis; quod quidem si ita contigit, nihil ibi materiæ accedit, & vacuus intra viscera hiatus compensat omnem illam apparentem materiæ in montem assurgentis congeriem.

Densitatem in internis partibus majorem erui non posse ex exigua attractione montis ingentis.

239. Crediderim ego sane majorem effectum deviationis penduli haberi posse, ubi perpetuum Telluris solum assurgit per ingentem tractum, ut a mari infero ad superum perpetuo assurgit Italia, quam ubi in coni formam assurgit mons. Et quidem tum multo etiam minor altitudo sufficit ad effectum satis ingentem. In dissertatione de Observationibus Astronomicis edita anno 1742 habeo num. 21 problema, quo quæritur attractio corpusculi collocati in centro sphæræ cujusdam in stratum ejusdem sphæræ clausum plano verticali transeunte per centrum, plano horizontali transeunte per centrum, alio plano huic parallelo ad datam ab eo distantiam, & superficie ipsius sphæræ. Posito, quod particulæ cujuscumque vim referat ejus massa divisa per quadratum distantiæ, ut exprimente 1 ad c rationem radii ad circumferentiam, attractio corpusculi siti in superficie sphæræ cu-

Major effectus perpetui soli assurgentis. Determinatio effectus strati certæ magnitudinis.

juſpiam habentis radium r ſit $\frac{2}{7}cr$ juxta num. 154, & poſito radio ſtrati ſphærici propoſiti $= m$, diſtantia binorum planorum horizontalium $= 1$, quæ reſpectu m ſit ſatis exigua, contemptis terminis, qui dividuntur per m^2, m^4 &c, invenio attractionem $= 2$ log. $m + 2.96$. Inde vero primum calculo inito pro altitudine pedum 50, ſive paſſuum 10, quorum ſemidiameter Terræ contineat millia 4000, qui eſt proximè numerus pedum Pariſienſium contentus in ſemidiametro Terræ, ut ea contineat ejuſmodi unitates conſtantes paſſibus denis 400000, pro diſtantia vero m milliariorum 100, ut m ſit $= 10000$, invenio vim gravitatis $\frac{2}{7}cr$ ad vim in illud ſtratum eſſe, ut eſt 10000000 ad 128, quæ eſt ratio radii ad tangentem 2″, 38‴, & ea eſſet aberratio penduli conſtituti prope ejuſmodi ſtratum, ſi id eſſet ejuſdem denſitatis cum media denſitate Terræ.

Effectum ejuſmodi eſſe ad ſenſum proportionalem ſoli craſſitudini ſtrati.

240. Deinde noto illud etiam, ſatis aucto, vel imminuto radio ſphæræ, cujus ſtratum aſſumitur, vix quidquam mutari ejus logarithmum, ſi numerus m ſit magnus, cum logarithmi ingentium numerorum parum mutentur, adeoque parum admodum mutari valorem formulæ, eundem autem, mutata ſtati craſſitudine mutari fere in eadem ratione, mutata autem denſitate media Telluris, & manente denſitate ſtrati, mutati in ratione reciproca denſitatis mutatæ.

Solum elevatum ad diſtantiam 100 paſſuum deviare pendulum per 4′

241. Hinc autem conſequitur, illud ſolum perpetuo elevatum ad diſtantiam 100 milliariorum, & aſſurgens per paſſus 100, cujuſmodi altitudines paſſim occurrunt, parere deviationem 20″, 280‴ = 24″, 40‴, cujus altitudo ſi ad mille paſſus aſſurgeret, plus quam 4 minutorum deviationem ſecum traheret in pendulo.

Inde methodum eſtimandi mediam denſitaté Telluris per ſtratum marini æſtus.

242. Atque inde ego tum quidem & methodum deduxi detegendi rationem mediæ denſitatis totius Telluris ad denſitatem aquæ, quam methodum ibidem propoſui. Si nimirum in aliquo ex iis locis Angliæ, & continenti interjectis, in quibus quandoque maris æſtus ad

50 pe-

50 pedes assurgit, ad ipsum maris littus sit turris, & in ea pendulum longius, ubi adveniente æstu succedit strato aeris stratum aquæ crassum pedes 50, & ad multa passuum millia protensum, deberet pendulum ipsum moveri nonnihil aquam versus, & microscopio adhibito motus is ingens appareret; qui quidem si duorum circiter secundorum esset, indicaret densitatem marium mediam æqualem densitati aquæ, cavitatibus compensantibus marmorum, ac metallorum prævalentem densitatem. Sin autem major, vel minor esset, minoris, vel majoris densitatis mensuram proderet, qua methodo haud scio, an ulla sit aptior, & an ulla alia ad rem ita apta unquam sit proposita ad æstimandam quantitatem materiæ in tota Tellure.

Irregularem Telluris textum prope superficiem debere turbare & pendula isochrona, & gradus, sed hos multo magis.

243. Sed eo omisso, ut redeamus ad rem nostram, patet illud, inæqualitates plurimas prope superficiem ubique occurrere, sola elevatiora, hiatus vel apertos, vel occultos, montium juga, metallorum fodinas, atque alia ejusmodi, quorum actio videatur æquivalere posse actioni etiam globi unius milliarii. Quare non est sperandum, ut progressus longitudinis pendulorum ab æquatore ad polum ita regularis sit, ut aliquot centesimis lineæ partibus non aberret ab incremento proportionali duplæ latitudinis sinui verso, nec ut nullæ occurrant deviationes pendulorum, quæ graduum mensuram turbent, quanquam hanc quidem multo magis turbare debent, quam illam.

Quid jam hinc demonstratum, quid inde aggrediendum.

244. Atque hoc pacto demonstrata jam hic habentur plurima etiam ex iis, quæ primo opusculo proposita fuerant a num. 46, & patet aditus inquirendi in Telluris figuram, ac densitatem per observationes pendulorum oscillantium ad singula minuta secunda, quorum longitudines gravitati proportionales sunt, ut supra etiam diximus.

Quæ pendulorum longitudines hic adhibendæ, & unde assumendæ.

245. Pendulorum ejusmodi longitudines observatæ passim occurrunt apud Auctores, & satis amplum earum

seriem

ſeriem collegit Bremondius in annotationibus ad Tranſactiones Anglicanas ab eo Gallicè editas. Verum ſunt ibi plures obſervationes parum admodum accuratæ, & quidem pleræque ex iis non ea diligentia, nec peractæ inſtrumentis adeo accuratis, ut ea ſunt, quæ nunc adhibentur. Hinc reliquis ego omiſſis omnibus, quinque tantummodo ſeligam, quarum priores quatuor occurrunt in Bouguerii opere de Figura Telluris pag. 342, quas ipſe ab aeris etiam impedimento liberavit, reducens ad eas, quæ haberentur in vacuo, & caloris inæqualitate, poſtremam inde deduco, & ex differentia 59″, quam Maupertuiſius invenit horis 24 in eodem Grahami pendulo Pelli in Lapponia, ac Pariſiis, unde deducitur ratio ponderum in iis locis 100137 ad 100000, ex qua ratione factis, ut 100000 ad 137, ita longitudo penduli Pariſienſis Bougueriana in vauco linearum 440.67 ad quartum, prodit 0.60, quo addito ipſi longitudini penduli Pariſienſis habetur longitudo ipſius Pelli 441.27.

Obſervationes Romæ inſtitutæ cur nulli nunc uſui.

246. Pro ipſius penduli longitudine plures ego ſuperiore menſe obſervationes inii cum Condaminio in hoc Collegii Romani Muſæo uſus eo ipſo pendulo, quo ipſe in America eſt uſus, & deinde Caillius ad promontorium Bonæ Spei, ſed quoniam accuratum numerum oſcillationum eodem illo pendulo inventarum vel in America, vel Pariſiis nuſquam Condaminius ipſe adhuc edidit, nec ſecum habet, editurus olim cum cæteris obſervationibus ſuis pluribus, non poſſum comparationem harum gravitatum cum æquinoctiali, vel Pariſienſi inſtituere, & invenire accuratam penduli longitudinem pro hiſce locis. Eas idcirco obſervationes hìc omitto, quas ego alibi, vel potius Condaminius ipſe publici juris faciet. Interea haſce quinque adhibebo, quas continet ſequens tabella.

Tabella ad eam rem pertinens: quid ea contineat.

247. In ea in prima columna adeſt locus obſervationis, in ſecunda latitudo loci, in tertia dimidium ſinus verſi latitudinis duplicatæ ad radium = 10000, in quarta longitudo penduli expreſſa lineis pedis Pariſienſis, in quinta ejus differentia a prima.

Lo-

Locus obſervationis	latitudo ° ′	½ ſin. verſ.	longit. penduli	differĕtia
Sub Æquatore	0, 0	0	439, 21	0
A Portobello	9, 34	271	439, 30	, 09
A Petit-Goave	18, 27	1002	439, 47	, 26
Pariſiis	48, 50	5667	440, 67	1, 46
Pelli	66, 48	8450	441, 27	2, 06

248. Jam vero in primis videre licet hoc pacto, quantum aberrent a ratione ſinus verſi latitudinis duplicatæ. Fiat ut differentia primi dimidii ſinus verſi a poſtremo 8450 ad radium 10000, ita differentia primi, & poſtremi penduli 2. 06 ad differentiam primi ab eo, quod habere deberet in polo, quod quidem invenitur 244. Tum ut radius ad quodvis aliud dimidium ſinus verſi, ita hìc numerus 2. 44 ad quartum, qui erit differentia debita accuratæ rationi ſinuum verſorum latitudinis duplicatæ. Eo pacto obtinentur ejuſmodi differentiæ a primo pendulo 0, 7, 24, 138, 206. Hæ differentiæ congruunt cum iis, quæ habentur in tabella intra paucas centeſimas lineæ partes, ſecunda intra 2, tertia intra 2, quarta intra 8, diſcrimine utique perquam exiguo.

Differentiæ penduli ex calculo, & ex obſervatione ſatis congruentes.

249. Deinde poſſunt aſſumi dena binaria longitudinum, & factis, uti eſt differentia dimidiorum ſinuum verſorum ad radium, ita differentia earum longitudinum ad quartum, qui erit differentia debita pendulo ſito in ipſo polo. Verum quoniam priores tres longitudines parum admodum a ſe invicem differunt, iis omiſſis reliqua binaria erunt 7. Ea ſingula non ita multum diſcrepant in ejuſmodi totali differentia exhibenda, & in ſingulis inventa differentia exhibet juxta num. 125 ellipticitatem pro ſecunda hypotheſi numeri 222, ſi eadem dividatur per longitudinem penduli ſub æquatore, & pro prima, ſi ea ellipticitas auferatur a fractione $\frac{1}{115}$.

Adhibenda eſſe binaria omnia obſervationum non nimis proximarum. Quo pacto adhiberi debeant.

Tabella ejusmodi comparationum.

250. Habentur in tabella sequenti ejusmodi producta. Continet prima columna longitudines, quæ comparantur, expressas numeris denotantibus earum ordinem expositum num. 247, secunda continet differentiam illam totalem inventam, tertia ellipticitatem inde provenientem pro secunda illa hypothesi, quarta pro prima.

1, & 5	2. 44	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{319}$	1, & 4	2. 58	$\frac{1}{170}$	$\frac{1}{355}$
2, 5	2. 41	$\frac{1}{182}$	$\frac{1}{312}$	2, 4	2. 54	$\frac{1}{173}$	$\frac{1}{343}$
3, 5	2. 42	$\frac{1}{182}$	$\frac{1}{312}$	3, 4	2. 57	$\frac{1}{171}$	$\frac{1}{351}$
4, 5	2. 16	$\frac{1}{203}$	$\frac{1}{265}$				

Consensus omnium binariorum dempto unico.

251. Patet ex hac tabella non ita multum a se invicem differre determinationes hujusmodi. Dempta enim quarta, quæ petita ab observationibus satis proximis aliquanto magis aberrat, reliquæ satis belle inter sese conveniunt potissimum pro prima hypothesi. Demptâ illâ, erit differentia omnium media 249, ex qua secundæ hypotheseos ellipticitas $\frac{1}{176}$ primæ autem $\frac{1}{335}$.

Tellurem habere eam minus densam, quam sint maria.

252. At quoniam in casu homogeneitatis differentia totalis juxta num. 214 deberet esse $\frac{5}{4}n$, nimirum $\frac{1}{230}$ totius, patet observationes homogeneitati obsistere. Quoniam vero majorem observationes exhibent gravitatis differentiam, facile deducitur, si Tellus orbes sphæricos habeat homogeneos, eam magis densam esse debere, quam sint nostra maria, juxta num. 226.

Ratio ejusmodi densitatum quæsit.

253. Ratio autem densitatis mediæ haberi potest ex formula numeri 225 ope longitudinis sub æquatore, & differentiæ cujusvis alterius penduli ab eo. Sed satius erit adhibere differentiam mediam inventam linearum 2. 49, vel potius ejus differentiæ rationem ad gravitatem totam

tam $\frac{1}{176}$. Satis erit hunc valorem ſubſtituere in formula numeri 225, in qua $\frac{t}{p} = \frac{20nl - 10mh}{15nl - 6mh}$, ſive $\frac{20 - 10 \times \frac{mh}{nl}}{15 - 6 \times \frac{mh}{nl}}$. Eſt enim $\frac{n}{m} = \frac{1}{289}$, $\frac{h}{l} = \frac{1}{176}$. Quare $\frac{mh}{nl} = \frac{289}{176}$. Hoc numero ſubſtituto, habetur $\frac{3520 - 2890}{2640 - 1734} = \frac{630}{906} = \frac{105}{151}$, ſatis proxime $\frac{2}{3}$. Nimirum denſitas marium ad denſitatem mediam Telluris, ut 105 ad 151, vel ut 2 ad 3.

Ratio denſitatis in ſecunda hypotheſi.

254. Eadem in ſecunda mea hypotheſi e contrario obveniret major. In eâ, differentiâ gravitatis diviſâ per gravitatem juxta num. 219, & 222, evadit $\frac{n}{2m\left(1 - \frac{3t}{5p}\right)}$, qua facta $= \frac{h}{l}$, eruitur $\frac{t}{p} = \frac{5}{3} - \frac{5nl}{6mh} = \frac{5}{3} - \frac{880}{1734} = \frac{1005}{867}$, vel proxime $\frac{7}{6}$. Sed de iis iterum aliquid in fine ſequentis capitis.

CAPUT II.

De figura Telluris, quæ oritur ex menſura graduum.

Quid ſit gradus generaliter, quid in ſphæra.

255. Gradum Telluris dicimus eum tractum, ex cujus extremis finibus ductæ binæ rectæ normales ipſius ſuperficiei, ubi conveniunt, angulum continent unius gradus. Si Tellus eſt ſphærica, rectæ omnes ſuperficiei perpendiculares concurrunt in centro; adeoque ſi ea ſecetur plano quovis, rectæ normales ſectioni ipſi, quæ inter ſe parallelæ non ſunt, coeunt aliubi, & ſi ſatis remota ſint ſectionis puncta, ex quibus diſcedunt, angulum continent unius gradus. Quamobrem in ſphæra in quavis poſitione habentur gradus, & omnes gradus ſectionum tranſeuntium per centrum, nimirum gradus circulorum maximorum ſunt æquales inter ſe.

Quid gradus meridiani in aliis ſolidis rotatione genitis.

256. In corpore abludente a ſphæra non ſpemper binæ rectæ ſuperſiciei perpendiculares ſibi invicem occurrunt. Si id corpus ſit ortum ex converſione curvæ cujuſdam

dam circa proprium axem, & concipiatur ſectio quævis per axem, quæ in caſu Telluris appellatur meridianus, ea erit æqualis ſemper curvæ genitrici, & omnes rectæ perpendiculares ſpuperficiei, quæ ducuntur per puncta ejuſmodi ſectionum, jacent in earum planis, adeoque, ſi parallelæ non ſint inter ſe, debent ſibi invicem occurrere, & ubi occurrunt angulum quendam continent, qui ubi fuerit unius gradus, is arcus ſectionis illius dicitur gradus meridiani.

Quid gradus paralleli in iiſdem æqualitas graduum ejuſdam paralleli, & graduum meridiani ſub eodem parallelo.

257. Si ſecetur id corpus plano perpendiculari axi, patet, omnes ſectiones fore circulos qui dicuntur paralleli, ac circuli paralleli gradus eſt is ejus arcus, ex cujus extremis punctis ductæ binæ rectæ lineæ ad ejus interſectionem cum axe angulum continent unius gradus. Patet autem in eo caſu, cujuſvis paralleli gradus omnes æquales eſſe inter ſe, gradus autem diverſorum parallelorum eſſe, ut eorum radios, ſive ut ordinatas curvæ genitricis perpendiculares axi, quæ eorum ciculorum ſunt radii. Patet itidem, gradus omnium meridianorum in eodem parallelo æquales eſſe inter ſe, cum eadem curva cum meridianis omnibus converſione ſui continua congruat aliis poſt alios.

Gradus ejuſdem meridiani inæquales. Quid ſit circulus oſculator.

258. Gradus autem ejuſdem meridiani in diverſis ejus locis diverſæ magnitudinis ſunt. Si eorum ratio quæreretur accurata in curvis etiam maxime cognitis, problema eſſet ſatis implexum. Sed is Meridiani arcus, qui gradum unum, vel alterum non excedit, haberi ſolet pro circulari, & unus gradus Meridiani habetur pro gradu circuli cujuſdam, qui eandem habet curvaturam, quam habet is arcus Meridiani alicubi circa medium. Curvatura autem curvæ cujuſcumque in puncto ejus quocunque dicitur ea, quam habet circulus, qui ibidem eam oſculatur. Porro circulus curvæ oſculator dicitur non is, cujus arcus cum ejus arcu accurate confundatur, quod nulli arcui utcumque exiguo accidit, ſed qui ad eam accedit magis, quam ullius alterius circuli arcus ita, ut in angulo,

lo, quem arcus curvæ tum arcu circuli osculatoris concontinet in puncto osculi, nullus circulus duci possit, quemadmodum, ut Euclides demonstravit, inter rectam, quæ circulum tangit, & arcum ipsius circuli intra angulum, quem continent in contactu, nulla alia recta potest interseri.

259. Porro illud accuratissime per Geometriam demonstrari potest, ut quarto meorum Elementorum tomo demonstrabo, nullum esse arcum curvæ cujusvis continuum, in quo non adsint infinita puncta circulum osculatorem habentia, & licet in punctis quibusdam curvarum, quæ ego anomala apello, possit nullus haberi osculator circulus, curvaturâ omnem circularem curvaturam excedente, vel deficiente a quavis circulari curvatura; ea tamen puncta anomala non possunt esse ubique in arcu continuo utcunque exiguo, sed debent distare a se invicem ita, ut inter bina quævis, quæ se proximè excipiunt omnia puncta circulum osculatorem habeant suum; ac dum in eo arcu concipitur punctum quodvis, quod ad alterum ex anomalis accedat motu continuo, mutatur etiam continua mutatione radius osculatoris circuli, qui & radius osculi dicitur, qui quidem vel evanescit, vel in infinitum excrescit, ubi id punctum recidit in alterum ex illis anomalis.

Generales quædam proprietates arcunm curvarum omnium relate ad radium osculi.

260. Demonstratur & illud, in quavis curva centrum circuli osculatoris, si quod est, esse in recta normali ad curvam ipsam ducta per punctum osculi, ut & illud, omnia centra circulorum osculatorum curvæ cujusvis esse in curva ejus evoluta, cui nimirum si advolvatur justæ cujusdam longitudinis filum, evolvaturque, prior illa curva generetur; ut e contrario si curvæ cujuspiam evolutione alia curva generetur, rectam tangentem quamcumque evolutæ fore normalem genitæ, & ejus segmentum inter evolutam, & genitam interceptum fore radium circuli osculantis genitam in ejus concursu cum ipsa, cu-

Centrum osculi in normali ad curvam, & in perimetro evolutæ.

jus nimirum circuli centrum ſit in ipſa evoluta, atque in eo ejus contactu.

Proprietates nõnullæ radii oſculi, & gradus ipſius relati ad gradum curvæ.

261. Porro ſi binæ rectæ normales cuilibet curvæ tranſeant per bina ejus puncta infinite proxima inter ſe, & ſibi invicem occurrant, demonſtratur illud; ultimum earum concurſum haberi in ipſo centro circuli oſculatoris. At ubi angulus eſt major, ut gradus unius, binæ normales per ejus extrema puncta ductæ poſſunt concurrere utlibuerit procul a centro circuli oſculatoris. Fieri itidem poteſt, ut arcus unius gradus plurimum differat a gradu circuli oſculantis curvam ubique intra eum arcum, quod quidem tum accidere poteſt, cum curvatura pergendo ab altero ejus extremo ad alterum primo quidem perpetuo creſcit, tum perpetuo decreſcit, vel viceverſa. At ubi curvatura ab altero extremo ad alterum perpetuo creſcit, vel perpetuo decreſcit ſemper; tum unus gradus curvæ eo pacto definitus, quo eum ſupra definivimus, erit ſemper æqualis uni gradui cujuſpium e circulis ipſum oſculantibus in aliquo e punctis interjacentibus, licet poſſit diſtare plurimum a gradu circuli curvam oſculantis in puncto medio arcus ejuſdem.

Quando liceat aſſumere gradũ curvæ pro gradu circuli ejus arcum oſculantis circa medium.

262. Hæc quidem omnia demonſtrari accurate poſſunt per ſimplicem etiam Geometriam; verum ubi curvaturæ mutatio non eſt ita magna, tum vero gradus curvæ nihil ad ſenſum differt longitudine a gradu circuli oſculantis ipſam curvam circa medium, unde fit, ut datâ menſurâ gradus, cenſeatur data etiam menſura radii circuli curvam oſculantis alicubi circa medium ipſum gradum, quæ nimirum facile inveniatur ducto ipſo gradu in 180, tum factis ut 355 ad 113, ita id productum ad radium ipſum.

Dato gradu paralleli, vel meridiani, dari ordinatã ad axem, vel radium oſculi.

263. Hinc jam fit, ut in ejuſmodi ſolidis & dato gradu circuli paralleli, detur ordinata ad curvam generantem, invenienda nimirum eâdem methodo, & dato gradu meridiani cenſeatur dari radius circuli oſculantis curvam circa medium arcum ipſum, ac viceverſa datâ illâ ordinatâ,

natâ, detur gradus circuli paralleli, & dato radio circuli meridianum osculantis in quodam puncto, censeatur datus ejusdem meridiani gradus jacens hinc,& inde ab illo puncto circa ipsum, qui gradus inveniantur factis, ut 113 ad 355 ita ea ordinata, vel is radius ad numerum, qui divisus per gradus 180 exhibeat quæsitum gradum.

264. Præterea si solidum sit figuræ sphæroidalis ortæ ab ovali quapiam linea habente centrum, ut est ellipsis, circulus parallelus, cujus planum transit per centrum, dicitur æquator ejus solidi, ac si e quovis alio puncto ducatur recta perpendicularis superficiei, quæ, cum in ipso meridiani plano jacere debeat, debet alicubi occurrere tam axi, quam radio æquatoris; angulus non obtusus, quem ea recta cum radio æquatoris continet, dicitur latitudo illius puncti Meridiani, unde fit, ut angulus, non obtusus, quem eadem continet cum axe, sit latitudinis complementum, & in Tellure per plurima astronomicarum observationum genera latitudines locorum definimus, a figura meridiani nihil pendentes, & eâ etiam prorsus ignotâ, accurratè cognitas. Gradus itidem meridiani pro data latitudine loci definire licet methodo, quam in primo opusculo innui, in quarto fuse exposui, ac adest methodus, qua & paralleli gradum definire liceat, quæ ad nostram expeditionem non pertinet.

Quid in ejusmodi solidis genitis ab ovali diameter, quid latitudo.

265. Porro in circulo si cognoscatur unus gradus ubicunque, totus circulus facile innotescit, ac in sphæra cognito unico gradu, ubicunque vel meridiani vel paralleli in data latitudine, innotescit radius sphæræ, & sphæra tota. In ellipsi Appolloniana si dentur pro binis latitudinibus cognitis bini gradus, ac per eos bini radii osculi, definiri potest ellipsis ipsa, & in sphæroide genita conversione ejusmodi ellipseos circa alterum e suis axibus, datis binis gradibus binorum parallelorum, vel binis ejusdem meridiani, vel gradu meridiani, & gradu paralleli, pro datis latitudinibus, & quidem in hoc prostremo casu, dato gradu paralleli vel in eadem latitudine communi gradui meridiani, vel in diversa,

Quibus gradibus datis detur circulus, sphæra, ellipsis, sphærois.

versa, inveniri potest ellipsis, quæ sphæroidem generat, & sphærois tota. Pro curvis autem sublimioribus plures requiruntur circuli osculatores dati pro datis latitudinibus ad ipsas determinandas, prorsus, ut bina puncta rectam determinant, tria non in directum incentia circulum, quinque sectionem conicam, & ita porro.

Quo pacto per radios osculi datos detur curva quævis.

266. Generaliter autem, ut dato certo punctorum numero, inveniri possunt infinitæ numero curvæ lineæ diversarum admodum specierum, quæ per ea transeant, series autem punctorum continua curvam determinat, ita & dato certo quovis numero radiorum osculi pro datis latitudinibus, infinitæ numero curvæ inveniri possunt, quæ ipsis satisfaciant; dato autem generaliter radio osculi per latitudinem datam determinatur curva: ac & illud fieri potest, ut sphærois compressa ad polos radium habeat osculi in ipso polo minorem, quam in æquatore, curvaturam nimirum minorem ibi, quam hìc, si curva generans non sit Ellipsis, sed aliud quoddam ovalis genus.

Cur de Telluris irregularitate dubitari cæptum

267. Quoniam theoria gravitatis generalis Ellipsim Apollonianam exhibet pro curva genitrice, sive Tellus homogenea sit tota, & ejusdem densitatis cum mari, sive ita regulariter heterogenea, ut paribus circumquaque a centro distantiis homogenea sit, idcirco sub initium creditum est posse ejus figuram determinari definitis binis gradibus satis a se invicem remotis ubicunque. Sed posteaquam plures, quam duo definiti sunt, determinationibus non consentientibus, de nucleo inæqualis formæ, vel de irregularitate densitatis dubitari est ceptum, de qua nunc quidem post mensuram nostram potissimum, cum Gallica Australi collatam, multo potiore jure dubitari potest.

Argumentum totius capitis.

268. En igitur totum argumentum hoc capite pertractandum, quod plura objicit problemata ad hanc rem pertinentia, quorum ego geometricas solutiones habeo; & aliquas quidem jam olim in prima illa mea de Figu-

Figura Telluris dissertatione exhibui, nunc autem omnia ordine suo plenius pertractabo.

269. Ac primo quidem, quod pertinet ad circulos osculatores in sectionibus conicis, id ego in tertio Elementorum meorum tomo per simplicem Geometriam, & quidem finitam accuratissimè persecutus sum, & plura theoremata eo pertinentia demonstravi in corollariis propositionis 9, quibus nunc utar. Inter ea est illud num. 520. *Radii circulorum osculatorum inter se sunt in ratione reciproca triplicata perpendiculi e centro in tangentem, ac directa triplicata normalis ad utrumlibet axem terminatæ*; unde illud colligitur num. 523, *radium circuli osculatoris esse quartum continuè proportionalem post dimidium latus rectum principale, & normalem axi transverso*. Eodem pacto colligi poterat itidem generalius, *esse quartam continue proportionalem post dimidium latus tectum axis utriuslibet, & normalem ipsi terminatam*.

Theorema de circulis osculatoribus in ellipsi.

270. Deinde data loci latitudine, datur ratio ordinatæ axi ad normalem, & ad subnormalem ipsius, ad quas est, ut cosinus latitudinis ad radium, & ad sinum, vel ut radius ad secantem latitudinis, & tangentem. Sit enim in fig. 23 *CB* semidiameter æquatoris, *Ee* axis, *HI* ordinata ipsi perpendicularis, *IF* normalis, *HF* subnormalis, angulus *HIF* erit mensura latitudinis loci *I* cum *HI* parallela *CB* producta tendat æquatorem versus, & normalis *FI* ad zenith. Assumpta autem normali *FI* pro radio, est *HI* cosinus, *HF* sinus anguli *HIF*; assumpta autem pro radio normali *HI*, est *IF* secans, *HF* tangens ejusdem anguli.

Data loci latitudine, dari rationem normalis ad ordinatam & subnormalem. Tab. 4, F. 23

271. Sunt autem aliæ binæ Ellipseos proprietates, quæ hìc erunt summo usui. Primo quidem si diametro *Ee* fiat circulus occurrens ordinatæ *HI* in *A*, semiaxi *CB* in *D*, erit semper *HI* ad *HA* in constanti ratione *CB* ad *CD*, vel *CE*, qua proprietate jam sæpius hìc usi sumus, & habetur elementorum meorum tomo 3 num. 365. Deinde est subnormalis *HF* ad abscissam a centro *HC*, ut CB^2 ad CD^2, vel CE^2. Id ibidem habetur num. 462. His positis

Aliæ binæ ellipseos proprietates.

ſitis problemata, quæ huc pertinent facile ſolvuntur. Exhibebo autem ſolutiones diverſas ab iis, quas ſimpliciſſimas ſane, & admodum elegantes, ac geometricas itidem exhibui in mea diſſertatione illa de Figura Telluris.

Problema præmiſſum, & ejus analyſis.

272. At prius præmitto hujuſmodi Problema. Data ordinata in data latitudine, & data ſpecie Ellipſeos, invenire axem, & diametrum æquatoris. Data latitudine, datur ratio datæ *HI* ad *HF*, ſive radii ad tangentem ipſius latitudinis. Hinc datur *HF*. Datur autem ratio *CB* ad *CE*; in qua ratione ſimplici cum ſit data *HI* ad *HA*, & in eadem duplicata data *HF* ad *HC* dabitur utraque, adeoque & *CA* ob angulum rectum *CHA*. Quare datur & *CE*, & *CB*, quæ habet ad ipſam rationem datam.

Coſtructio ejuſdem.

273. Sit ratio ſemiaxis ad ſemidiametrum æquatoris m ad n; Ducatur *HI* æqualis datæ ordinatæ, & fiat angulus *HIF* æqualis latitudini datæ, & *IHF* rectus; tum fiat, ut m ad n, ita *HI* ad *HA*, & ut m^2 ad n^2, ita *HF* ad *HC*. Capta $CE = CA$ in directum cum *CH*, & *CB* ipſi perpendiculari, quæ ſit ad eam, ut m ad n, habebuntur quæſiti ſemiaxes.

Solutio problematis inde deducta: aliud lemma propoſitum.

274. Quoniam autem dato gradu paralleli datur ordinata *HI*, juxta num. 263, patet dato eo gradu, & ſpecie Ellipſeos, dari ipſius Ellipſeos axes. Sed adhuc hoc aliud præmittam lemma. *In Ellipſi differentia quadratorum binarum ordinatarum quarumvis axi utrilibet ad differentiam ſubnormalium, quæ ipſis reſpondent, eſt, ut quadratum ſemiaxis ejuſdem ad quadratum alterius.*

Ejus lemmatis demonſtratio.

275. Cum enim ſit per num. 271, HI^2, & hi^2 ad HA^2, & ha^2, ut CB^2 ad CE^2, erit & $hi^2 - HI^2 . ha^2 - HA^2 : : CB^2 . CE^2$. Eſt autem ob $CA = Ca$ differentia quadratorum ha, HA eadem, ac HC, hC, & cum per eundem numerum ſit HC^2, & hC^2 ad HF^2, & hf^2, ut EC^4 ad CB^4, erit etiam $HC^2 - hC^2 . HF^2 - hf^2 : : CE^4 . CB^4$. Quare, conjunctis rationibus, erit $hi^2 - HI^2$ ad $HF^2 - hf^2$, ut CB^2 ad CE^2, & EC^4 ad CB^4 conjunctim, ſive ut EC^2 ad CB^2. *Q. E. D.*

276. Po-

276 Posito hoc lemmate sponte fluit solutio hujus problematis. *Datis binis gradibus binorum parallelorum datæ latitudinis in sphæroide elliptica, invenire speciem, & magnitudinem ellipseos genitricis*. Datis enim iis binis gradibus, dabuntur per num. 263 binæ ordinatæ *HI*, *hi*, & datis binis latitudinibus dabuntur per num. 270 binæ subnormales *HF*, *hf*. Dabitur igitur, & ratio differentiæ quadratorum illarum ad differentiam quadratorum harum, adeoque ratio quadrati *CE* ad quadratum *CB*, & proinde ratio ejus rationis subduplicata, nimirum ratio *CE* ad *CB*, quæ speciem ellipseos exhibet, quæ simul cum altera ordinata data exhibet per num. 272, & magnitudinem semiaxium *CE*, *CB*.

Inventio ellipseos genitricis ex datis binis gradibus binorum parallelorum.

277. Ubi agitur de sola specie, pro ordinatis *HI*, *hi* apponi possunt ipsi numeri graduum. Constructio autem problematis geometrica potest esse hujusmodi. Capiatur in fig. 24 in latere anguli recti *IHF* segmentum *HI* ad arbitrium, tum *Hi* ad *HI*, ut est gradus major ad minorem. Fiant anguli *HIF*, *Hif* æquales latitudinibus, quæ iis respondent, & centris *I*, *f* radiis *Hi*, *HF* inveniantur in iis lateribus ejusdem anguli recti productis puncta *B*, *E*, eritque semidiameter æquatoris ed semiaxem, ut *HB* ad *HE*. Exprimment enim *HI*, *Hi* fig. 24 ordinatas, fig. 23; *HF*, *Hf* subnormales; HE^2, HB^2 differentias quadratorum illarum, & harum, adeoque ipsæ *HE*, *HB* rationem semiaxium per num. 274.

Constructio pro invenienda specie. Tab. 4, F. 23 24.

278. Quod si dato gradu paralleli, & meridiani in eadem latitudine, quæratur species, & magnitudo ellipseos, problematis solutio habetur multo expeditior; sed præmittendum hoc aliud lemma ad conicas sectiones pertinens. Si in fig. 23 ex concursu *F* normalis cum axe ducatur usque ad ordinatam recta *FL* parallela radio circuli *CA*, ea æquabitur dimidio lateri recto axis *Ee*, eruntque *HL*, *HI*, *HA* continue proportionales. Est enim *FL* ad *CA*, sive *CE*, ut *FH* ad *CH*, sive per num. 271 ut quadratum *CB* ad quadratum *CE*, vel ut dimidium latus rectum

Investigatio ejusdem ex dato gradu paralleli, & meridiani eodem in loco. Tab. 4, F. 23

axis Ee ad eandem CE, adeoque FL æqualis ipsi dimidio lateri recto axis ejusdem. Cum vero sit $HI^2 . HA^2 :: CB^2 . CE^2 :: HF . HC :: HL . HA$, patet, esse HL, HI, HA in proportione continua.

Solutio ejus problematis.

279. Dato vero gradu paralleli in I, habetur per n.263 ordinata IH, & ob datam latitudinem HIF datur IF. Dato autem gradu meridiani in eadem latitudine, datur radius ellipsim osculans in I, adeoque datur & ejus ratio ad normalem datam FI, ea autem per n.269 est duplicata rationis ipsius FI ad dimidium latus rectum axis Ee, cum sit ille radius tertius post dimidium latus rectum axis ipsius, & normalem. Quare datur & id latus rectum principale, & facto centro in F, intervallo ejus dimidii lateris recti principalis invenietur punctum L, ac assumpta HA tertia post HL, HI, invenietur punctum A; unde ducta AC parallela LF determinabit centrum C, & semiaxem CE æqualem ipsi AC, ac alter semiaxis CB erit medius inter CE, & id dimidium latus rectum peincipale. Atque eo pacto patet simul & speciem, & magnitudinem obtineri.

Difficultas ubi quæritur idem ex dato gradu paralleli uno in loco, & meridiani in alio. Initium analyseos algebràicæ.

280. Si autem detur gradus paralleli in una latitudine, & gradus meridiani in alia, problema evadit multo sublimius, & ad ejus solutionem requiruntur curvæ multo altiores. Innuam tantummodo, quo pacto id problema solvi possit per calculum finitum ex hisce ipsis prncipiis. Ponatur dimidium latus rectum axis $Ee = x$, $CE = y$. radius osculi in i datus per gradum meridiani in ea latitudine $= a$, ordinata $HI = b$, sinus latitudinis in $i = s$, cosinus $= c$, ad radium $= 1$, tangens latitudinis in $I = t$. Cum sit a quarta continue proportionalis post x, & normalem if, erit ipsa $if = \sqrt[3]{ax^2}$, adeoque $hi = c\sqrt[3]{ax^2}$, $hf = s\sqrt[3]{ax^2}$.

Binæ incognitæ cum binis æquationibus ad solutionem. Problema admodum altum.

281. Erit autem & $HF = bt$ ob $HI = b$. Jam vero ut x ad y, ita HI^2 ad HA^2, hi^2 ad ha^2, HF ad HC, hf ad hC. Quare dantur analyticè quadrata HA, HC, ha, hC, quorum priora duo simul si fiant $= y^2$, & posteriora duo $= y^2$,

haben-

habentur binæ æquationes cum binis incognitis, sed æquatio inde orta plurimum assurgit, quæ quidem me absterruit ab investigatione solutionis geometricæ, quæ nimirum, ubi per curvas fit nimis compositas, minus est elegans. Fieri autem potest, ut alicubi extet multo expeditior, & simplicior solutio, quam ego non viderim, sed nec magnæ sane utilitatis est ea solutio, cum gradus circuli paralleli multo minus accurati haberi possint.

282. Multo utilius est problema, quo datis binis meridiani gradibus in diversis latitudinibus, quæratur species, & magnitudo ellipseos. Id autem solvitur multo quidem facilius, & eodem fere reducitur, quo primum e superioribus tribus problematis. Est autem hujusmodi. *Datis binis gradibus meridiani in diversis latitudinibus, invenire speciem, & magnitudinem ellipseos*. Quoniam dantur ii gradus, dabitur eorum ratio, & ratio ejusdem subtriplicata, nempe per n. 269 ratio normalium *IF*, *if* ad se invicem. Cum igitur dentur, & latitudines, adeoque per n. 270 rationes earum normalium ad ordinatas *HI*, *hi*, & ad subnormales *HF*, *hf*; dabitur & ratio ipsarum *HI*, *hi* ad *HF*, *hf*, & ratio differentiæ quadratorum illarum ad differentiam quadratorum harum, quæ exhibet speciem ellipseos, ut supra num. 276. Determinatio speciei ellipseos ex binis gradibus meridiani.

283. Data specie, magnitudo facile invenietur ope hujus alterius lemmatis pertinentis ad conicas sectiones, nimirum: tangens anguli *HAC* ad tangentem anguli *HIF* est, ut *CE* ad *CB*. Est enim tangens prior ad posteriorem in ratione composita ex directa *CH* ad *FH*, & reciproca *HA* ad *HI*; nimirum ex directa duplicata *CE* ad *CB*, & directa simplici *CB* ad *CE* conjunctim, adeoque tantummodo ex directa simplici *CE* ad *CB*. Lemma pro determinatione magnitudinis.

284. Posito hoc lemmate, cum detur species ellipseos, & latitudo *HIF* cum sua tangente, dabitur & tangens anguli *AIC*, adeoque is angulus, & proinde dabitur etiam, ratio *CA*, sive *CE* ad *FI*, cum nimirum ea sit composita ex rationibus *CA* ad *AH*, sive radii ad cosinum anguli Determinatio ipsa.

Qqq 2 *CAH*,

CAH, AH ad HI, sive CE ad CB ratione data ob datam ellipseos speciem, ac demum HI ad IF, seu cosinus anguli HIF ad radium, quæ rationes omisso radio reducuntur ad has duas semidiametri æquatoris ad semiaxem, & cosinus latitudinis ad cosinum anguli, cujus tangens ad tangentem latitudinis est, ut semiaxis ad semidiametrum æquatoris. Datur autem ratio dimidii lateris recti axis *Ee* ad CE duplicata rationis CB ad CE. Datur igitur & ratio ejusdem dimidii lateris recti ad IF, cujus duplicata erit ratio normalis IF ad radium circuli osculatoris, quartum nimirum continuè proportionalem post ipsum, & normalem eandem IF per num. 269. Data igitur ea ratione, & dato radio osculi, dabitur IF, & inde per regressum dabitur CA, sive CE, ac per ipsam CB, & magnitudo ellipseos.

Constructio pro invenienda speciе. Tab. 4, F. 24

285. Constructio pro specie invenienda potest esse hujusmodi. Fiant in fig. 24 anguli HIF, HIO ad eandem partem æquales binis latitudinibus datis, prior majori, posterior minori. Producatur OI in *o*, ut sit *Oo* ad IF in ratione subtriplicata gradus respondentis latitudini HIO ad gradum respondentem latitudini HIF. Ducatur *oi* parallela HO, quæ occurrat HI in *i*; tum *if* parallela *oO*, & centris I, *f*, radiis H*i*, HF inveniantur puncta E, B, ut prius, eritque HE, ad HB ratio semidiametri æquatoris ad semiaxem. Erit enim IF ad *if*, sive *oO* hìc, ut in fig. 23. Erunt autem hìc anguli HIF, H*if*, sive HIO æquales angulis HIF, *hif* figuræ 23. Hinc ratio rectarum FI, *fi* hìc tam ad rectas HI, H*i*, quam ad rectas HF, H*f* hìc, ut ibi ratio rectarum FI, *fi* ad rectas HI, *hi*, & HF, *hf*. Quare & differentiæ quadratorum hìc, ut ibi, nimirum hìc HE^2 ad HB^2, ut ibi CE^2 ad CB^2.

Constructio pro invenienda magnitudine. Tab. 4, F. 23

286. Pro invenienda magnitudine fiat in fig. 23 semicirculus ED*e*, & angulus ECA, cujus tangens ad tangentem latitudinis sit, ut in inventa ellipseos specie est CE ad CB, ducatur AH, & fiat HI ad AH in eadem ratione inventa CB ad CE, tum angulus HIF æqualis latitudini,

tudini, & capiatur tertia post CE assumptam, & CB inventam ex data specie ellipseos; tum quarta continuè proportionalis post hanc, & IF. Demum fiat, ut hæc postremo inventa ad CE, ita radius osculi inventus ex gradu ad semiaxem, quo invento invenitur per speciem datam etiam semidiameter æquatoris.

287. Si libeat pro hoc casu, cujus nobis usus major erit, formulam algebraicam eruere, ponatur $CE = 1$, $CB = x$, gradus propior æquatori g, remotior G, tum $g^{\frac{1}{3}} = a$, $G^{\frac{1}{3}} = A$, ac normales if, IF poterunt poni $= g^{\frac{1}{3}}$, $G^{\frac{1}{3}}$ sive a, A. Sit sinus prioris latitudinis ad radium $1 = s$, posterioris $= S$, cosinus illius c, hujus C, & erit $hi = ac$, $HI = AC$, $hf = as$, $HF = AS$, eritque $a^2c^2 - A^2C^2 . A^2S^2 - a^2s^2 :: 1 . xx = \frac{A^2S^2 - a^2s^2}{a^2c^2 - A^2C^2}$, sive cum sit $c^2 = 1 - ss$, $C^2 = 1 - SS$, erit $xx = \frac{A^2S^2 - a^2s^2}{a^2 - a^2s^2 - A^2 + A^2S^2}$, adeoque $\frac{1}{xx} = \frac{A^2S^2 - a^2s^2 + a^2 - A^2}{A^2S^2 - a^2s^2} = 1 - \frac{A^2 - a^2}{A^2S^2 - a^2s^2}$. Formula algebraica pro specie.

288. Quoniam autem inde deducitur proportio hujusmodi $xx . 1 :: 1 . 1 - \frac{A^2 - a^2}{A^2S^2 - a^2s^2}$, erit etiam $xx . xx - 1 :: 1 . \frac{A^2 - a^2}{A^2S^2 - a^2s^2} :: A^2S^2 - a^2s^2 . A^2 - a^2$; & quoniam $x^2 - 1$ est quadratum distantiæ foci a centro, sive eccentricitatis, erit eccentricitas ad semiaxem conjugatum in ratione subduplicata $AA - aa$ ad $AASS - aass$. Elegans eccentricitatis determinatio.

289. Si eccentricitas sit exigua facile derivabitur formula multo simplicior pro differentia semidiametri æquatoris a semiaxe. Nam erit x quamproxime $= 1$, adeoque $xx - 1 = \frac{AA - aa}{AASS - aass}$. Porro $xx - 1 = CB^2 - CD^2$, nempe (facta $Cd = CD$) $= DB \times Bd$, sive proximè $= 2CD \times BD$, vel, ob $CD = CE = 1$, proximè $= 2BD = \frac{AA - aa}{AASS - aass}$ Reductio formulæ pro casu exiguæ eccentricitatis: ejusdem conspiratio cum formula Maupertuisii.

Cum vero sit $AA = G^{\frac{2}{3}}$, & $aa = g^{\frac{2}{3}}$, & G parum differat a g, erit proximè $A^2 - a^2 = \frac{2}{3} \times G^{-\frac{1}{3}} \times (G - g)$, vel $\frac{2}{3} \times g^{-\frac{1}{3}} \times (G - g)$, unde consequitur $BD = \frac{1}{3} \times \frac{G-g}{GSS - gss}$, formula eadem, quam longe alia methodo invenit Maupertuisius in Commentariis Acad. Paris. ad an. 1737, ubi habet $\frac{E-F}{3(Eſſ-Fss)}$; sunt enim ipsi valores E, F, $ſ$, s, qui mihi G, g, S, s.

Ulterior reductio pro gradibus in polo, & in æquatore.

290. Ea vero, abeunte puncto i in æquatorem E, ubi evanescit s, evadit simplicior $\frac{1}{3} \times \frac{G-g}{GSS}$, & puncto quoque i abeunte in polum in B, ubi evadit sinus $S = 1$ habetur $\frac{G-g}{3G}$, nimirum hujusmodi theorema: *Semidiameter æquatoris ad ejus differentiam a semiaxe est proxime, ut gradus meridiani in æquatore ad trientem differentiæ graduum ibi, & in polo.*

Generale theorema pro eo casu, quæcunque sit eccentricitas

291. At pro eo simplicissimo casu multo elegantius pro quavis utcunque magna ellipticitate ex num. 269 eruitur hujusmodi theorema. *Est semidiameter æquatoris ad semiaxem in ratione subtriplicata gradus in axe ad gradum in æquatore.* Sunt enim gradus in ratione reciproca triplicata perpendiculi e centro in tangentem, & perpendicula ejusmodi, ubi contactus sunt in axium vertice, sunt ipsi semiaxes ad contactum terminati. Quoniam autem in quantitatibus parum a se invicem discrepantibus est cubus ad cuborum differentiam proximè, ut quantitas simplex ad triplum differentiæ quantitatum ipsarum simplicium, ex hoc ipso theoremate, ubi ellipticitas exigua sit, profluit illud superius.

Incrementa graduum ab æquatore ad polum, ut decrementa distantiarum a centro, & ut quadrata sinuum latitudinis.

292. Ex eo, quod gradus sint reciprocè, ut cubi perpendiculorum e centro in tangentem, facile etiam deducitur, incrementum graduum ab æquatore ad polos fore proxime, ut est quadratum sinus latitudinis, vel ut est sinus

ſinus verſus latitudinis duplicatæ, in qua ratione eſt decrementum diſtantiæ, & incrementum gravitatis ab æquatore ad polos. Ubi enim ſatis exiguæ ſunt, differentiæ & quadratorum, & cuborum, & poteſtatum quarumvis, ſunt, ut ipſæ laterum differentiæ. Quare incrementa graduum erunt, ut decrementa perpendiculi. Porro pro perpendiculo e centro in tangentem aſſumi poteſt ipſa diſtantia centri a contactu in ellipſi parum abludente a circulo, etiam ubi agitur de ratione differentiæ unius perpendiculi ab alio; nam perpendiculum eſt latus, diſtantia vero baſis trianguli rectanguli, ac intercepiunt angulum exiguum pendentem ab ellipticitate, unde facile deducitur methodo ſimili ei, qua uſi ſumus ſupra num.232 differentiam perpendiculi a baſi, ſive errorem, qui committi poſſet, eſſe quantitatem exiguam ordinis ſecundi, & tuto contemni. Erit igitur decrementum perpendiculi, adeoque & incrementum gradus proxime, ut decrementum diſtantiæ, ſive in ea ratione, quam diximus.

293. Hinc autem facile eruitur illud, pro decremento gradus, quod etiam locum habet in incremento diſtantiæ, & decremeto gravitatis a polo ad æquatorem, & quod etiam ſupra adhibuimus num. 194, nimirum ea omnia eſſe proxime, ut quadratum coſinus latitudinis, vel ut ſinum verſum dupli complementi latitudinis ipſius. Nam quadratum ſinus, & coſinus æquantur conſtanti quadrato radii, ut exceſſus gradus in quovis loco ſupra gradum in æquatore, cum defectu a gradu in polo æquatur toti conſtanti differentiæ gravitatis in æquatore, & polo. Quare cum quadratum ſinus ſit, ut totalis differentia ad priorem partem, ſive ad illum exceſſum, erit & illud idem quadratum radii ad quadratum coſinus, ut eſt eadem totalis differentia ad poſteriorem partem, ſive ad illum defectum, qui proinde erit, ut quadratum coſinus. Id autem eſt, ut ſinus verſus arcus dupli, nimirum ut ſinus verſus dupli complementi, & eadem eſt demonſtratio pro diſtantia, & gravitate.

Decrementa cõtra a polo ad æquatorẽ, ut quadrata coſinuum ejuſdem.

294. Ope

Methodus inquirendi in figuram Telluris per binos gradus.

294. Ope hujus, vel prioris theorematis, ex quo hoc ipſum deductum eſt, eruitur methodus ſatis expedita inquirendi in ſpeciem ellipſeos ex binis gradibus Meridiani obſervatis in binis latitudinibus quibuſcunque, ut & ex binis longitudinibus penduli obſervatis in binis itidem locis latitudinis diverſæ eandem itidem in primi capitis fine determinavimus. Fiat enim primum, ut ſemidifferentia ſinuum verſorum latitudinis utriuſque duplicatæ ad radium, ita differentia graduum obſervatorum ad quartum, & habebitur differentia graduum in æquatore, & polo. Tum erit, ut triens hujus differentiæ ad gradum utrumvis aſſumptum proxime pro gradu medio, ita differentia ſemidiametri æquatoris a ſemiaxe ſive compreſſio ad ſemidiametrum Terræ mediocrem. Hoc ſecundum rite fieri patet ex num. 291; illud primum facile demonſtratur. Cum enim decrementa graduum ſint, ut ſunt ſinus verſi latitudinum duplicatarum; erit differentia decrementorum uſque ad binos eos gradus, quæ eadem eſt, ac differentia eorundem graduum ad decrementum debitum toti quadranti, ut differentia ſinuum verſorum duplicatarum latitudinum, ad quas ii gradus pertinent, ad differentiam ſinuum verſorum duplæ latitudinis, & dupli quadrantis, quorum ſinuum prior eſt $=0$, poſterior eſt diameter, ſeu duplus radius. Quare eſt, ut differentia illorum ſinuum verſorum ad duplum radium, vel ſemidifferentia ad radium, ita differentia illorum graduum ad differentiam gradus in æquatore a gradu in polo.

Ellipticitas quo pacto inveniatur ex binis gradibus.

295. Ellipticitas autem, ſive ratio differentiæ binorum ſemiaxium ellipſeos genitricis ad ſemiaxem alterum facile invenitur, dividendo trientem differentiæ graduum in æquatore, & polo inventam per gradum integrum. Inventa autem una ellipticitate, quam exhibent bini gradus, facile inde eruitur ea, quam exhibent bini alii; cum nimirum ea ellipticitas ſit directè, ut differentia graduum, & reciprocè, ut differentia ſinuum verſorum latitudinum duplicatarum.

297. Atque hinc jam facile est investigare, an cum Newtoniana gravitate, & densitate paribus a centro distantiis pari cohæreant gradus observationibus definiti, uti sub finem capitis primi investigavimus, an cum eadem conciliari possent pendula oscillantia ad singula minuta secunda. Gradus, quorum mensurum habemus omnino accuratam sunt hi tantummodo; is quem, Maupertuisius cum sociis definivit in Laponia; ii, quos Cassinus cum Caillio definivit in Gallia, gradu Piccarti post mutationes quatuor certo demum definito; is, quem Bouguerius, ac Condaminius definiverunt in Quitensi Provincia; is, quem nuperrime Caillius ad Promontorium Bonæ Spei dimensus est, quibus & hunc nostrum addo in Pontificia ditione definitum. Hi quidem omnes sunt accurratissime definiti, mensuris ad eundem modulum exactis, habita ratione omnium motuum Fixarum, adhibitis egregiis sectoribus, & omnibus præcautionibus necessariis ad rem bene gerendam. Sunt præterea & alii alibi ab aliis definiti, ut ille Norwoodi in Anglia, & Snellii olim in Holandia, quem Muschembroekius prius, tum Cassinus reformavit. Sed iis multo minus fidendum esse, est omnino certum. Norwoodi determinatio intra limites multo laxiores exacta est, & ipse mensuræ modulus non ita certus, & instrumenta non ita exacta, ut ejus gradus cum nostris hisce comparari possit.

Inquisitio in gravitatem Newtonianã & densitatem Telluris per gradus.

298. Snellii gradus, ut a Cassino de Thurry demum reformatus est, multo ille quidem est accuratior. Quæ ad eum pertinent, & plures ejus reformationes videre est in ipsius de Thurry Schediasmate in Commentariis Academiæ Parisiensis ad annum 1747. Is gradus respondet latitudini 52°, 4′, 17″. E Snellii determinatione prodiisset hexapedarum 55020. Eum Meischembroekius rectificatis triangulis, & retentis observationibus astronomicis Snellii, reduxit ad hexapedas 57033. Jacobus Cassinus repetitis observationibus Astronomicis anno 1701 ipsum invene-

Snellii gradus adhuc post omnes reformationes minus certus.

rat 56496, De Thurry ejus filius novam basim dimensus, sed paternis adhibitis observationibus Astronomicis eum demum reduxit ad hexapedas 57145. Puto, nullius audaciæ esse dubitare ahduc aliquid de iis Astronomicis observationibus intra pauca secunda, cum nec praxis astronomica, nec instrumentorum sabrica eo tempore usque adeo excultæ essent, ut deinde est præstitum.

Series graduum unde deprompta.

299. Graduum satis accuratè definitorum seriem hìc apponam, & primo quidem aderit numerus, qui eorum ordinem referet, ut singuli possint & nominari, tum latitudo medio gradui debita, deinde ipse gradus. Primum gradum Lapponicum desumpsi ex notissimo Maupertuisii opusculo; Sed 16 hexapedas detraxi ob neglectam refractionem, quod & alii in eo gradu jam præstant; insequentes 11 ex opere Cassini De Thurry *Meridienne verifiee*; duodecimum ex nostris observationibus; decimum tertium ex Bouguerii, & Condaminii operibus assumpto medio; postremum ex pagella Caillii ipsius, qui eum dimensus est, & humanissime sua manu scriptam mensuram communicavit Mairanio, qui eam ad me transmisit.

	latitudo		Gradus
	o.	′	hexapedæ
1	66.	20	57422
2	49.	56	57084
3	49.	23	57074
4	49.	3	57069
5	47.	58	57071
6	47.	41	57057
7	46.	51	57055
8	46.	35	57049
9	45.	45	57050
10	45.	43	57040

11	44.	53	57042
12	43.	31	57048
13	43.	1	56979
14	0.	0	56753
15	—33.	18	57037

Accedit hisce meridiani gradibus gradus circuli paralleli, quem Cossinus de Thurry, & Caillius definiverunt hexapedarum 41618, debetur autem latitudini 43°. 32′.

300. Jam hic plurimæ comparationes institui possent, cum bini quicumque gradus definiant compressionem Telluris in hypothesi Newtonianæ ellipseos. Proximi gradus inter se adhiberi quidem non debent, cum error perquam exiguus observationis maximum in conclusione errorem secum trahat ob differentias nimis exiguas. Hinc si ex Gallicis omnibus adhibeatur tertius tantummodo Piccardianus, nimirum debitus latitudini 49°. 23′, toties, & cum tanta cura ad trutinam revocatus, habebuntur gradus 5, nimirum primus in Lapponia, tertius in Gallia, & postremi tres, in Italia, in Quitensi Provincia, ad Promontorium Bonæ Spei. Primo quidem investigare licet quod supra in fine primi capitis præstitimus pro pendulis, an excessus graduum reliquorum supra gradum meridiani primum æquatori proximum respondeant sinubus versis latitudinum duplicatarum, & quantum inde aberrent, & id quidem præstiti, tum quæsivi differentiam, quam exhibent binaria singula ex illa ipsa hypothesi proportionalitatis cum iis sinubus versis, quam, si eam legem omnes ejusmodi excessus servarent, exhiberent eandem. Triens autem ejus differentiæ per gradum æquatori proximum divisus exhibet ellipticitatem, quam fractionem reduco ita, ut numerator sit unitas. Quinque gradus ad perquisitionẽ opportuni.

301. Proponam igitur binas: in prima singulorum ex iis quinque gradibus primo locum, tum latitudinem, deinde dimidium sinum versum duplæ latitudinis, tum excessum ejus gradus supra primum gradum respondentem Binarum tabellarum, quæ cõsequuntur, notio

 lati-

latitudini = *o* deinde eundem exceſſum erutum calulo ex hypotheſi proportionalitatis, ac demum errorem. Deinde exhibebo ſecundam ejus ope, in qua in prima columna erunt numeri graduum combinatorum, in ſecunda exceſſus, qui ab iis infertur pro gradu in polo ſupra gradum in æquatore, in tertia fractio, quæ habetur ex triente ejus exceſſus diviſo per gradum primum, nimirum ellipticitas. Sunt autem ejuſmodi binaria decem. Caillii gradus noſtro major productam exhibet figuram, hinc differentiæ, & ellipticitati ejus collatæ cum noſtro gradu præfigam ſignum negativum in ſecunda tabella, ut ejus errori in prima itidem negativum. En autem ipſam tabellam primam.

Gradus	Latitudo ° ′	$\frac{1}{2}$ lin. v. ad rad. 10000	Hexapedæ	Diff. a primo obſerv.	Diff. computata	Error
Quitenſis	0, 0	0	56751	0	0	0
Prom. B. S.	33,18	2987	57037	286	240	—46
Romanus	42,59	4648	56979	228	372	144
Pariſien.	49,23	5762	57074	323	461	138
Lapponic.	66,19	8386	57422	671	671	0

Irregularitas primæ tabellæ.

302. In hac tabula habetur in poſtrema columna, quantum aberrent a ratione duplicata ſinuum latitudinis, vel a ſinubus verſis latitudinis duplæ gradus intermedii, poſito, quod extremi ſint accurati, & dum in tertio, & quarto gradus computatus excedit obſervatum, in ſecundo ab eo deficit. Mutatis extremis etiam nonnihil, ipſi cum ſecundo nihil ad ſenſum ab ea lege diſcreparent, at tertius, & quartus cum ea conciliari omnino non poſſunt. Sed jam videndum in ſequenti tabula, qui proveniat e binis quibuſque combinationibus exceſſus gradus poſtremi ſupra primum, & quæ inde eruatur ellipticitas.

Binariũ	Excessus postremi	Ellipticitas	Binariũ	Excessus postremi	Ellipticitas
1, 5	800	$\frac{1}{213}$	2, 4	133	$\frac{1}{1128}$
2, 5	713	$\frac{1}{239}$	3, 4	853	$\frac{1}{200}$
3, 5	1185	$\frac{1}{144}$	1, 3	491	$\frac{1}{347}$
4, 5	1327	$\frac{1}{128}$	2, 3	-350	$-\frac{1}{486}$
1, 4	542	$\frac{1}{314}$	1, 2	957	$\frac{1}{78}$

303. Possèt combinari & gradus paralleli definitus a Cassino de Thurry, & Caillio, cum quovis ex hisce meridiani gradibus per illud arduum problema num. 280; sed paralleli gradus multo minus accurate determinari potest. Patet autem jam satis ex hac tabula, quam irregulares sint hi gradus, qui tam diversas inter se exhibent combinationes. Si inter omnes 10 combinationes assumatur medium, erit medius excessus 222, atque hinc ellipticicitas $\frac{1}{155}$, sed abjectis sexta, & nona combinatione, quæ tam immaniter a reliquis discrepant, & in distantia non ita magna sunt a se invicem, medium erit 286, ex quo ellipticitas $\frac{1}{195}$. Sed adhuc hoc medium a pluribus earum octo determinationum plurimum distat. Irregularitas secunda: medium inter determinationes.

304. Porro hinc jam patet hasce graduum determinationes non cohærere cum ellipsi Newtoniana, nec vero cum ulla ellipsi utcumque magis, vel minus compressa; nam bini quique gradus eandem semper ellipsim deberent exhibere; ex ipso autem eo dissensu patet, nec differentias ipsas proportionales esse sinubus versis latitudinum duplicatarum, quod si haberetur, eadem, ut monui ellipticitas ex binis quibusque gradibus consequeretur. Gradus hosce nō cohærere cū ulla ellipsi.

305. Nonnulli, ut nuperrime Eulerus in schediasmate, cujus summam quandam mihi humanissimè communicavit hìc Romæ præsens, dum hæc scribo, Condaminius, obsevationibus vim inferunt, ut omnia concilient. Et is quidem gradum Lapponiensem, Africanum, Quitensem, mutatione Conciliatio Euleriana, vi nimia observationibus illata.

ne adhibita hexapedarum 19 in singulis, conciliat cum ellipsi Newtoniana, sed Gallicus Piccardi gradus corrigendus illi est hexapedis 169, quem idcirco sibi maximè suspectum esse profitetur, & novas in Gallia mensuras desiderat. At id quidem errorem exposcit intolerabilem sane in gradu cum ingenti cura definito a peritissimis viris. Nec, vero cum tam multi gradus in Gallia definiti sint per tot bases toties determinatas, per tot astronomicas observationes, qui omnes a mensura, quam Eulerus exposceret, discedunt discrimine adeo immani, cum a se invicem, & a Piccardiano illo tanto minus differant, quam ille pro errore requireret, cumque & hìc noster in Italia cum Piccardiano satis congruat, nam pro differentia latitudinis $6^{\circ}.23'$ exhibet differentiam in gradibus hexapedarum 95, nimirum 15 hexapedarum circiter, ut par est, in gradus singulos; nullo pacto tam multis observationibus tantam inferre vim licet; quod eo magis evidenter patebit, si ea considerentur, quæ opusculo quarto exposui de limite, citra quem contineri debent errores, qui in mensuris ejusmodi per hæc nostra tempora admitti possint.

Bougueriana hypothesis a Caillii gradu eversa. Generale problema determinandi curvam ex datis gradibus.

306. Alii ad alias hypotheses confugiunt, ut Bouguerius ad eam, quod graduum incrementa sint, ut quadrato-quadrata sinuum latitudinis, non ut quadrata tantummodo. Sed & eam hypothesim, quæ quidem cum gradu Lapponico, Gallico, Piccardiano reformato, ac Quitensi satis belle consentit, & quæ cum nostro hoc etiam consentit itidem satis belle, gradus Caillii ad Promontorium Bonæ Spei deseruit, præterquamquod nulla physicâ causâ ejusmodi potissimum proportio fulciebatur. Is quidem generaliter per calculum infinitesimalem proponit generalem solutionem problematis, quo data graduum serie inveniatur curva, ex qua casus quosdam particulares deducit, illum in primis, quem adhibuit tum quidem cum successu, sed quem Caillii gradus hìc demum, uti monui, prorsus evertit. Ejusmodi problematis generalis constructionem hìc proponam solius Geometriæ ope, ut supe-

superiora etiam pertractavi, ac ad meam de re tota sententiam, quam primo opusculo proposui post comparationes nonnullas demum delabar.

307. Ad inveniendam curvam meridiani ex datis gradibus consideretur in fig. 25 quadrans *FHG* curvæ generantis evolutione sua quadrantem meridiani *ADB*. Sit quævis ejus tangens *HD* occurrens semidiametro æquatoris *CA* in *M*, meridiano in *D*, quæ debet esse æqualis radio circuli curvam osculantis in *D*, ac arcui *HF* una cum primo radio *FA*. Consideretur arcus ejus curvæ infinitesimus *Hh* pro continuatione ipsius tangentis, & sint *HL*, *hl*, *DE* perpendiculares *AC*, & *hI* parallela eidem. Meridiani ortus a curvæ cujusdā evolutione. Tab. 4, Fig. 25

308. Angulus *EMD* exprimit latitudinem loci, cum *MA* producta tendat ad æquatorem, *MD* ad Zenith. Quare & angulus *HhI*, qui æquatur interno, & opposito *hMl*, adeoque *EMD*, erit æqualis latitudini loci, & erit *Hh*, ad *HI*, ut radius ad sinum latitudinis, & *Hh* ad *hI*, sive *lL*, ut radius ad cosinum latitudinis ipsius. Est autem *Hh* incrementum arcus *FH*, adeoque & radii circuli osculatoris, qui datur, dato gradu ad latitudinem quamvis. Quare hinc admodum facile deducitur constructio problematis per curvarum quadraturas. Nam ex analogia exposita rectangulum sub *Hh*, & sinu latitudinis æquatur rectangulo sub radio, & incremento *HI* ordinatæ *LH*, ac rectangulum sub *Hh*, & cosinu ejusdem æquatur rectangulo sub radio, & *hI*, sive *lL* incremento abscissæ *FL*, adeoque tota ordinata *LH* æquatur summæ priorum rectangulorum applicatæ ad radium, abscissa *FL* summæ posteriorum, nimirum utraque areæ datæ, ubi dentur omnes circulorum osculatorum radii respondentes omnibus latitudinibus, applicatæ ad rectam datam. Analysis geometrica pro invenienda ea evoluta.

309. Sit nimirum in fig. 26. *ADA'* quadrans circuli, cujus radius *FA* sit æqualis radio *FA* fig. 25 circuli curvam osculantis in æquatore in *A* definitus a primo gradu sub ipso æquatore, & assumpto pro quavis latitudine, quam exprimat in figura 26 arcus *AD*, radio osculi *AH*, *A*... Constructio pro ipsa evoluta, & curva meridiani ejus ope. Tab. 4, Fig. 25 26

in

in recta AF, $A'F$ producta, ducantur DI, HI parallelæ AF, FA' occurrentes ſibi invicem in I, & DI', $H'I'$ parallelæ $A'F$, FA ſibi invicem occurrentes in I', ac per omnia puncta I, I' ducantur curvæ FIL, AIM', quæ datis radiis oſculi per latitudines, dabuntur. Accipiatur jam in figura 25 abſciſſa FL æqualis areæ $AFH'I'$ figuræ 26 applicatæ ad rectam FA, & in eadem fig. 25 ordinata LH æqualis areæ FHI figuræ 26 applicatæ ad ipſam FA, ac punctum H in fig. 25 erit ad curvam FHG evolutam curvæ quæſitæ ADB, cui ſi advolvatur filum per GHF, & addatur FA æqualis illi FA figuræ 26, ejus evolutione deſcribetur curva ADB quæſita.

Demonſtratio cõſtructionis Bini caſus a Bouguerio conſiderati. Conſenſus prioris cũ pluribus obſervationibus.

310. Nam Hh, & $H'h'$ in fig. 26 debuit eſſe eadem, ac in fig. 25. Si autem ibidem rectæ DI, di, DI' di' occurrant radiis FA, FA' in E, e, E' e', erit DE, DE', ſive HI, $H'I'$ ſinus, & coſinus latitudinis, adeoque areola $I'H'h'i'$, & $IHhi$ debuit æquari producto ex radio FA, & lineola HI, & hI figuræ 25; & proinde tota area $AFHI'$, & FHI illius, toti FL, & HL hujus ductæ in FA utriuslibet, nimirum ſola FL, vel HL hujus æqualis areæ $AFH'I'$, vel FHI illius applicatæ ad FA, uti eſt præſtitum.

Solutionis hujus Generalis a Bouguerio propoſitæ bini caſus ab eo conſiderati: primus cum quibus congrueret.

311. Huc redit ipſa ſolutio generalis a Bouguerio etiam propoſita, qui multa, quæ ad ipſam generalem ſolutionem illuſtrandam pertinent, acutiſſime perſequitur, & plures peculiares hypotheſes conſiderat. Binas autem potiſſimum excolit, illam, in qua exceſſus graduum ſupra primum ab æquatore gradum, ſive illæ rectæ FH in fig. noſtra 26 ſint, ut quadrata ſinuum latitudinis, & illam, in qua ſint, ut eorum quadrato-quadrata. Primam ſecutus hypotheſim, quæ eſt illa ipſa, quam Newtoniana requirit theoria, cum elliptica Telluris forma, invenerat ille omnia conſpirare, quæ eo uſque innotuerant. Gradum meridiani Laponicum, gradum æquatori proximum, & vero etiam gradum Gallicum Piccardi reformatum per obſervationes aſtronomicas Academicorum, qui e circulo polari redierant, ac ipſum definiverant hexapedis 57183,

qui

qui quidem ita reductus, satis belle congruebat cum eadem hypothesi, in qua ipsum illud maxime confirmaverat, quod definita inde magnitudine totius sphæroidis, gradus ille etiam paralleli observatus congruebat intra solas 11 hexapedas cum eo, quem calculus exhibebat.

312. At paullo post constitit certo illud, Picardum non in Astronomicis tantummodo observationibus errasse, sed etiam in Geodeticis, quæ ibi pluribus vicibus summa cum diligentia repetitæ sunt, ac innotuit demum, ipsos Piccardi errores se, raro admodum, & felici successu, compensasse, ac ipsum gradum esse hexapedarum 57074., quem ille definiverat hexapedis 57060. Tum vero rejicienda ea hypothesis fuit, & alia inquirenda. Invenit autem, hosce tres gradus ejusmodi esse, ut excessus Gallici, & Lapponiensis supra Quitensem sub æquatore sequantur quamproxime rationem quadrato-quadratorum sinuum latitudinis, & hanc hypothesim arripuit, ac in ea problema solvit.

Secunda Bouguerii hypothesis post correctionem postremam gradus Piccardi.

313. Et quidem hìc etiam noster Italicus non multum ab eadem hypothesi dissentit. In secunda enim ejus tabula pag: 305 habetur pro latitudine 43° gradus 56961, cum noster in eadem latitudine sit 57979, solis 18 hexapedis major, & ille paralleli gradus dissentit itidem parum admodum, qui e Bouguerii tabula deberet esse hexapedarum 41633, major solis 15 hexapedis invento 41618. Dissentit quidem multo magis postremus Gassini, & Caillii in Gallia, qui est hexapedarum 57048 in latitudine 43°, 31′, cum pro eadem ex Bouguerii tabula eruatur 56969, nimirum 79 hexapedis minor; sed id quidem ipsum non multum absterruit, cum nullam ejus discriminis mentionem fecerit, licet 5 annis ante ejus librum Cassini Meridiana prodierit cum iis mensuris. At multo jam magis Caillii gradus ad Promontorium Bonæ Spei ab hac nova ejus hypotesi abludit. Is enim in latitudine 33°, 18′ ex Bouguerii tabula esset 56841, quem observatio ex-

Consensus aliorũ cum eadem: eadẽ a Caillii gradu eversa.

 hibuit

hibuit 57037, fere 200 hexapedis longiorem, quod hanc hypothesim prorsus evertit.

Cailliani gradus consensus cũ priore, aliorum dissensus.

314. Hic Caillii gradus ab illa paiore hypothesi excessuum proportionalium quadratis solis latitudinum multo sane minus dissensisset. Eum enim prior Bouguerii tabula requirit 56986, discrepantem ab observato per hexapedas 51, quod discrimen multo minus evaderet, si Quitensis, & Laponiensis gradus corrigerentur nonnihil, sed Gallicus, ut vidimus, & hìc noster Italicus tam immani inde discrimine distant, ut in observationes id ipsum reijci nullo modo possit. Quocumque te vertas, nihil certum, sibi constans, & regulare occurrit.

Aliarum hypothesium gravitatis tendentis ad datum centrũ inutilis perquisitio.

315. Iis hypothesibus omissis, possent aliæ post alias assumi, quæ pluribus satisfaciant gradibus; & posset ex observationibus, quas habemus hucusquæ deduci evoluta illa figuræ 25, assumendo saltem ea sola ejus puncta, quæ ex gradibus dimensis deducuntur, quæ non ita pauca essent, si gradus omnes assumerentur, quos num. 299 exposuimus, tum inquiri posset in radios osculi curvarum, quæ oriuntur ex gravitate ad datum centrum directa, in quas superiore capite inquisivimus, ut definiretur gravitatis lex, quæ ejusmodi gradus præberet. Sed hoc postremum ipsum difficultates haberet plures, & admodum probabile est, legem illam, quæ ejusmodi gradus exhiberet, non consensuram cum incremento gravitatis ab æquatore ad polum, quæ sola jam ejusmodi legem definit.

Irregularitas requisita a gradibus aliquando in majore latitudine minoribus.

316. Præterea illud irregularitatem summam secum traheret, quod alicubi in majore distantia ab æquatore minores sint gradus, nec id quidem tantummodo in exiguo tractu, ut in Gallia, ubi in serie numeri 299 habetur gradus major in latitudine $45^{\circ}, 45'$, quam in latitudine $46^{\circ}, 35$; sed & in majore, cum nimirum gradus Caillii ad Promontorium Bonæ Spei in latitudine $33^{\circ}, 18'$ sit major nostro in Italia in latitudine $43^{\circ}. 1'$, quod quidem arguit

guit vel hemisphærium auſtrale a noſtro boreali admodum diverſum, vel curvam illam evolutam figuræ 25 admodum irregularem, quæ nimirum ſi perpetuo ductu incurvatur verſus centrum *C*, ut figura exhibet, debent gradus ab æquatore ad polum perpetuo creſcere.

317. Sed iis omiſſis noſter hìc gradus, ſi comparetur cum Caſſiniano in Gallia auſtrali in eadem fere latitudine definito, excludit omnes ejuſmodi gravitatis hypotheſes ad unicum centrum directæ. Hic enim noſter ab illo differt per *69* hexapedas, cum quo intra 7, vel 8 convenire deberet, cum in ea hypoteſi debeat curva circa axem, ut vidimus, circumquaque ſui æqualis eſſe, & ſimilis, quas quidem hypotheſes, ut innui etiam, ſuperiore capite, illud quoque excludit, quod ſingulæ ad ſingulos effectus explicandos hypotheſes configendæ non ſunt, a gravitate autem ad unicum punctum directa omnia cæleſtia phænomena, quæ mutuam gravitatem requirunt, plurimum abhorreant.

Ejuſmodi hypotheſes excluſæ a collatione gradus Romani, & poſtremi Gallici.

319. Hinc noſter hic ipſe gradus ſuadet legem gravitatis, quæ pendeat a poſitione diverſa partium materiæ, in quam tenditur, cum non appareat, a qua alia cauſa repeti poſſit inæqualitas graduum meridiani ſub eodem parallelo, niſi a mutata pro materiæ diſpoſitione directione gravium, & cum ea curvatura ab æquilibrio indicata. Favet igitur hic ipſe Noſter gradus Newtonianæ gravium theoriæ plurimum, a qua quidem omnino etiam excludit homogeneitatem materiæ, ac regularem quendam progreſſum denſitatis vel a centro ad ſuperficiem, vel potius prope ſuperficiem ipſam ab æquatore ad polos, & irregularitatem aliquam indicat in ejus textu. Id ipſum profecto indicat idem ille progreſſus graduum ſeriei expoſitæ num. 299 per Galliam, qui ſanè in differentia latitudinis non ita exigua, ſatis eſt irregularis, ut patebit ſolo intuitu, irregularitate omnino multo majore, quam, quæ videatur in hac Aſtronomiæ luce timeri poſſe ex obſervandi methodis, & diligentia. Ip-

Ea collatio congruens cum gravitate pendente a poſitione partium materiæ, & irregulari textu ejuſdem.

ſam indicat, vel etiam evincit noſtri hujuſce gradus comparatio cum eo Promontorii Bonæ Spei, quo eſt minor, utut graduum decem inrervallo magis diſtet ab æquatore. Irregularitati autem ipſi plurimum adhuc magis favet illud, quod in fine primi opuſculi ſupra innui, exemplum omnium Naturæ operum, quæ quidem in elementis ſimplicitatem ſummam præſefert ubique, in elementorum aggregatis inæqualitatem affectat.

Perquiſitio figuræ Telluris e gradibus non abſoluta, ſed vix inchoata.

320. En igitur, quid de re tota ſentiendum mihi videatur. In primis illud mihi perſuaſum eſt, quæſtionem de magnitudine, & figura Telluris determinanda ex menſura graduum non ſolum abſolutam adhuc non eſſe, ſed eſſe vix inchoatam. Maupertuiſius ex duobus gradibus Lapponienſi, & Gallico rem confectam arbitratus, Figuram Telluris determinatam Europæ in ſummam expectationem erectæ nunciavit: at eam determinationem ipſe deinde commutavit. Bouguerius aliquanto poſt ex iiſdem principiis, ſed aliis aſſumptis gradibus, ſuo, & Lapponienſi, rem ſe itidem perfeciſſe arbitratus primo, conſentientibus menſuris aliis, commutare deinde debuit ſententiam ſuam, & mutata hypotheſi poſt mutatam Gallici gradus magnitudinem omnia explicavit, licet nulla ejus hypotheſeos phyſica, ac mechanica ratio reddi poſſet. Mox Caillii gradus eam hypotheſim ipſam funditus evertit, noſter autem omnia, quæ huc uſque habita fuerant pro indubitatis, ut illud, Meridianos omnes æquales eſſe, pervertit multo magis. Quo plura per obſervationem definivimus huc uſque in hoc genere, eo magis incerti reddimur de re tota.

Fructus ex ejuſmodi perquiſitionibus jam collectus.

321. Eſt tamen adhuc ingens hujuſmodi perquiſitionum fructus huc uſque etiam habitus. Primo quidem, quod excludantur hypotheſes omnes gravitatis ad datum tendentis centrum, quas hic noſter gradus excludit. Deinde, ut gravitas mutua in particulas materiæ multo probabilior fiat irregulari hac mutatione curvaturæ curvæ equilibrii, a qua graduum magnitudo deſumitur. Præterea

terea & illud, quod adhuc e solis etiam gradibus per mensuram definitis admodum probabile redditur Tellurem ad polos compressam esse; cum nimirum gradus omnes intermedii, & noster hic, & ille Caillii Affricanus, & Gallici omnes minores sint Lapponiensi, majores Quitensi.

322. At quanta potissimum Telluris compressio sit, quæ sit forma meridiani cuiusque, qui densitatis progressus a superficie ad centrum, id ex sola graduum dimensione omnino non novimus, nec vero illud, an ingens quæpiam habeatur in intimis Terræ visceribus irregularitas in textu materiæ, an inæqualitates hæ omnes, & irregularitates sint effectus minorum inæqualitatum, quas in superficie cernimus. Quin immo quoniam graduum mensura determinat curvaturam curvæ æquilibrii, ne illud quidem constat, an ipsa æquilibrii curva in se redeat, an infinitis etiam spiris circumagatur, quod sane fieri posset. Si enim per gravium directionem in loco quovis, & per polum concipiatur planum quoddam, & in eo curva linea, quæ ex illo puncto digressa, perpetuo perpendicularis ubique sit ad gravium directiones in omnibus sui punctis, eam irregulariter contorqueri debere patet in mutuæ gravitatis generalis theoria ex ipsa montium, ac vallium irregularitate, ac irregulari textu partium Terræ superficiei promixarum, quæ ejus curvæ irregularitas tanta etiam esse posset, ut flexum mutaret circulo osculatore in infinitum abeunte alicubi, vel in nihilum, tum etiam in negativum, licet ea curva a sphærica, vel regulari cujusdam ellipseos forma parum admodum, & vero etiam nihil ad sensum discederet, nisi forte actio in totam internam Telluris massam multo minus irregularem multo magis prævalens actionem ejusmodi irregularitatum minueret. Eam autem contorqueri patet ex ipso graduum inventorum irregulari progressu, quanquam ex iis colligi videatur & illud, cohiberi omnino, & plurimum minui a prævalente illa totius Tellu-

Quid adhuc incertum. Irregularitas curvæ æquilibrii.

ris

ris actione actionem inæqualitatum ejusmodi, cum graduum irregularitas ipsa respectu totorum graduum perquam exigua inventa sit. Adhuc tamen fieri posset, ut æquilibrii curva, curvaturæ ipsius, non ita magna, sed nec omnino insensibili, mutatione continua, post integrum in eo plano gyrum, in se ipsam non rediret, sed illo puncto vel inferior, vel superior in infinitum contorqueretur, quod quidem an accidat, incertum omnino est.

Ex pendulis, & gradibus simul conjici posse irregularitatē esse superficiei proximam.

323. Hæc omnia prorsus incerta sunt, si solas graduum dimensiones consideremus. At si iis conjungamus pendulorum isochronorum longitudines, quas huc usque per observationes satis accuratas habuimus, licebit in primis, satis valida conjectura inferre illud, irregularitates in Telluris textu in superficie potius esse, & prope ipsam, quam in intimis ejus visceribus. Illæ enim, ut vidimus num. 243 multo magis irregulares reddunt graduum dimensiones, quam longitudines pendulorum, contra vero hi; ac illud jam vidimus, pendulorum longitudines satis congruere cum regularitate, & Elliptica Telluris forma, longitudines graduum esse admodum irregulares.

Observationes posse componi cū densitate paribus a centro distantiis pari.

324. Deinde colligi & illud potest, observationes, quæ huc usque habitæ sunt non pugnare cum nucleo habente densitatem eandem paribus a centro distantiis, quod quidem nonnulli arbitrantur. Demonstravit Clerautius, quod quidem & ex iis patet, quæ demonstravi a num. 221, si differentia gravitatis in æquatore, & polo divisa per gravitatem totalem exhibeat fractionem majorem, quam sit $\frac{1}{230}$ totius, quod haberi deberet in casu homogeneitatis, nucleus autem paribus a centro distantiis, eandem densitatem habeat, & gravitate mutua Newtoniana præditus sit, debere densitatem mediam nuclei esse majorem densitate marium, sed ellipticitatem minorem quam $\frac{1}{230}$, quæ ab ipsa homogeneitate requiritur. Invenit autem ejusmodi fractionem majorem revera esse, & affirmavit ellipticitatem minorem erui e graduum mensura; unde intulit, ea duo conciliari non posse, nisi

assuma-

assumatur certa nuclei ipsius ellipticitas. Majorem illam fractionem nos etiam invenimus supra num. 251, nimirum $\frac{1}{176}$. Verum ellipticitatem e gradibus sumendo inter omnes decem determinationes mediam, invenimus non majorem $\frac{1}{210}$, sed minorem, nimirum $\frac{1}{255}$. Illa qnidem prior fractio $\frac{1}{176}$ requireret ellipticitatem $\frac{1}{332}$ juxta num. 241, minorem adhuc, quam $\frac{1}{255}$; sed adhuc hæc duo manifesta sunt; primo quidem minorem haberi ex omnibus quinque graduum combinationibus simul compositis, ut oportebat; deinde vero exiguo errore in gravium directione, nec ita magno in gravitatis vi orto ex irregularitate Telluris superficiei proxima facile fieri posse, ut imminutâ primâ fractione e pendulorum longitudinibus derivata, adeoque auctâ ellipticitate, quæ ex ipsa oritur, imminuta vero itidem ellipticitate media, quam graduum combinationes exhibent, res ad æqualitatem, & concordiam reducatur.

325. Sed adhuc exiguus est quinque pendulorum, & quinque graduum rite observatorum numerus. Optandum illud, ut multo plures habeantur observationes utriusque rei; & quod pertinet ad dimensiones graduum, est, quo ipsos multo accuratius, & tutius liberemus ab effectu irregularitatis superficiei proximæ. Id obtinebitur primo, si observationes astronomicæ fiant in summis montibus potius, quam in plano. Tum enim, si quid est densioris materiæ, vel vacui prope superficiem, id in pendulorum directione, & proinde in graduum mensura, ob obliquitatem respectu ponderis in edito siti, multo minus deviare poterit instrumentorum astronomicorum pendula. Quod si in omnibus, vel plurimis saltem e stationibus editioribus poligoni fiant observationes astronomicæ, tum vero fortuita illa irregularitate in contrarias partes temere agente, sumendo inter omnes determinationes mediam, multo tutius judicari poterit de singulorum graduum mensura. Id & laborem requirit multo sane majorem, & impensas, extructis in ipsis monti-

Plures observationes requiri. Quid graduũ accuratiori determinationi utile.

montibus obſervatoriolis ligneis, ac diuturniore in iis mora; at nihil eſt, quod Aſtronomorum patientia, & munificentia Regum ſuperare non poſſit.

Si pendula, & gradus non conveniant, non neceſſario confugiendum ad nucleũ ellipticum: poſſe gravitatis legem in exigua diſtantia diſcrepare a Newtoniana.

326. Quod ſi poſt plurimas ejuſmodi obſervationes inveniatur & media fractio e pendulorum longitudine eruta, & ellipticitas media derivata a gradibus, major, quam $\frac{1}{230}$, ne tum quidem ad nuclei ellipticitatem neceſſario confugiendum erit. Illa mea ſecunda hypotheſis maſſæ e centro agentis in ratione diſtantiarum directa, ellipticitatem requirit juxta num. 224 ſemper æqualem fractioni e gravitate derivatæ. Et quidem ſi ex decem graduum binariis, rejectis illis binis, quæ num. 303. rejecimus, reducatur ellipticitas graduum ad $\frac{1}{195}$, quam pendula iſochrona juxta num. 251 exhibent $\frac{1}{176}$, exiguum ſane diſcrimen inter binas ejuſmodi determinationes invenitur. Maſſæ e centro ita agentis hypotheſis arbitraria eſt, & cum cæteris Naturæ phænomenis nequaquam conſentiens; at & illa ellipticitas nuclei, quæ omnia conciliet, eſt itidem arbitraria, cum ex plurimis aliis figuris id ipſum obtineri poſſit. Ex alia parte nec illud ſatis conſtare arbitror, an nimirum gravitatis lex in hac vicinia prope ſuperficiem Terræ ſatis proximè ſequatur rationem reciprocam duplicatam diſtantiarum. Ego, qui vires mutuas punctornm omnium materiæ cenſeo ab unica curva linea exprimi omnes, quam in pluribus meis diſſertationibus expoſui, cenſeo, in maximis diſtantiis, in quibus Planetæ a Sole diſtant, & Luna a Terrà, ejuſmodi rationem ſequi quamproximè; in minimis ab ea in immenſum recedere. Fieri poſſet, ut in hiſce mediis, in quibus nos in Telluris ſuperficie ſiti a reliquis ejus partibus diſtamus, tantum ab ea aberraret, quantum eſt ſatis ad hoc, ut ſumma virium æquivaleat actioni nuclei ſphærici paribus a centro diſtantiis homogenei, una cum maſſa quadam in centro agente in ratione diſtantiarum directa, quod quidem ſi omnino ita ſe haberet; omnia ſatis ſecum invicem congruerent.

327. Ac-

327. Accedit, quod & perpetuus quidam regularis progressus densitatis ab æquatore ad polos in strato Telluris satis crasso superficiei proximo pendulorum inæqualitatem augere plurimum posset, inæqualitate graduum parum admodum immutata. Nam, ut num. 233. vidimus, massa æquivalens sphæræ habenti radium 8 milliariorum per integram lineam penduli longitudinem mutat, quam mutationem stratum perpetuum multo majorem reddit. Idem autem stratum, si perpetua quadam lege ab æquatore ad polos mutetur, vix ullam deviationem penduli parit, cum ea pendeat a sola differentia densitatis ejus strati ad boream, & ad austrum; mensuram autem graduum mutat adhuc multo, ac multo minus, cum ejus mutatio pendeat a sola differentia deviationum penduli jam exiguarum in initio, & fine arcus assumpti. Quid præstet perpetuus progressus densitatis ab æquatore ad polum.

328. Utraque autem hæc caussa, nimirum & recessus aliquis gravitatis a ratione reciproca duplicata distantiarum, & progressus aliquis densitatis in locis superficiei Terræ proximis, prout regularis fuerit, & simplex, vel irregularis, & satis composita, explicare etiam poterit id, quod plures pendulorum isochronorum, & graduum observationes exhibebunt, si forte ea duo vel ejusmodi obvenerint, ut quadratis sinuum latitudinis respondeant quidem eorum excessus, sed inter se non conveniant in exhibenda Telluris ellipticitate, & media densitate, vel nec ipsis sinuum quadratis respondeant. Observationes futuras per ejusmodi caussas explicari posse.

329. Illud omnino hic iterum monendum censeo, videri mihi evidentissimum sane, compressionem Telluris ad polos ex observationibus huc usque institutis esse admodum probabilem; irregularitatem curvaturæ ejus superficiei, quæ directioni gravium sit perpendicularis in hac a centro distantia, in qua nos homines vivimus, esse omnino certam; veram figuram superficiei regularis cujuspiam, ad quam abrasis montibus, & vallibus oppletis, sibi proximam reduceretur aspera hæc, & irregularis Terræ superficies, atque ipsam ejus compressionis magnitudinem esse adhuc maxime incertam. Quid certum; quid adhuc incertum sit.

Alia, quæ cum ellipticitate Telluris connectuntur. Exigua spes rem perficiendi per Lunæ parallaxes.

330. Diuturni laboris, plurimarum observationum, & meditationum fructus erit olim accurata determinatio veræ ellipticitatis Telluris, quam & pendula isochrona, & graduum dimensiones, de quibus egimus, & vero etiam marini æstus phænomena, æquinoctiorum præcessio, Lunæ parallaxes, quæ omnia inde pendent, rite inter se collata determinabunt. Quanquam id, quod ad Lunæ parallaxes pertinet, parum admodum spei mihi conciliat, cum illud reputo, unum milliare elevationis majoris superficiei, non nisi unico minuto secundo mutare ipsam horizontalem Lunæ parallaxim, ut adeo eadem parallaxis in Meridiano a tota ellipticitate, quæ Newtono milliaria 17 non excedit, vix 8, vel 10 secundis mutari possit. Ubi autem de phænomeno agitur, quod, ut ejusmodi parallaxis, vix unquam immediate observari potest, sed magna ex parte a lunaribus repeti motibus debet, haud scio, an unquam futurum sit, ut definiri possit intra limites aliquot secundorum. Sed ea omnia longiorem perquisitionem exposcunt.

Solutio facilior problematis, quo figura quæritur ex gradu meridiani, & paralleli. Theorema eo conducens.

331. Iis hic ego omissis finem hujusmodi meditationibus meis imponam, sed in ipso fine exhibebo solutionem admodum expeditam ejus problematis, quod num. 280 affirmavi esse multo sublimius, & cujus analyticam solutionem ibidem innui, problematis nimirum, quo quæritur species, & magnitudo ellipseos genitricis ex dato gradu paralleli in una latitudine, & gradu meridiani in alia. Est id quidem altum, si generaliter solvendum sit pro quavis ellipticitate utcumque magna. At si agatur de ellipticitate exigua, qua hic nobis est opus, solutionem habet admodum expeditam, quæ mihi in mentem venit, posteaquam reliqua jam fuerant typis impressa. Pendet autem solutio ab hujusmodi theoremate. *Ubi ellipticitas sit exigua, differentia dimidii lateris recti axis utriuslibet a semiaxe altero, ad differentiam ejusdem a normali terminata ad eundem priorem axem, est proxime in ratione duplicata radii ad cosinum latitudinis.*

332. De-

332. Demonstratur facile id theorema ex eo, quod n. 278 est demonstratum, existente *FI* normali in fig. 23 rectam *FL* parallelam *CA* esse æqualem dimidio lateri recto axis *Ee*, & *HA*, *HI*, *HL* esse continuè geometricè proportionales. Nam in primis si in *CB* producta sumatur *Cl* æqualis dimidio lateri recto *FL*, erunt *CD*, *CB*, *Cl* continuè proportionales in eadem ratione; adeoque erit *Bl* ad *IL*, ut *Cl*, vel *FL* ad *LH*, sive proximè *FI* ad *IH*, ut radius ad cosinum latitudinis *HIF*; & si *FL* ocurrat ellipsi in *O*, ob *FI* perpendicularem arcui *IO*, & ipsum arcum perquam exiguum, haberi poterit pro recto etiam angulus *IOL*; cumque ob *LO*, *IF* proxime parallelas haberi possit & *ILO* pro æquali *HIF*, erunt similia triangula rectangula *LOI*, *IHF*, & erit *LI* ad *LO*, itidem ut *FI* ad *IH*, sive ut radius ad cosinum latitudinis. Quare erit *Bl*, nimirum differentia dimidii lateris recti axis *Ee* a semiaxe altero *CB*, ad *LO*, quæ ob angulum *FIO* rectum haberi potest pro differentia dimidii lateris recti *FL* a normali *FI*, in eadem ratione duplicata. Demonstratio ipsius. Tab. 4, F.23

353. Sit jam dimidium latus rectum $FL = 1$, ejus differentia a *CB*, sive $Bl = x$, cosinus latitudinis loci *I* ad radium 1 sit *C*, loci *i* sit *c*, & erit $1 . CC :: x . LO = CCx$, adeoque normalis *FI* erit $= 1 - CCx$. Inde autem duo deducuntur. Primo quidem *IH*, factis, ut 1 ad *C*, ita $FI = 1 - CCx$ ad $HI = C - C^3 x$: deinde radius circuli osculantis ellipsim in *I*, qui cum per num. 269 sit quartus continue proportionalis post *FL*, & *FI*, differet ab *FL* proxime per triplam *LO*, adeoque erit $= 1 - 3CCx$. Quare radius osculi in *i* erit $1 - 3ccx$. Erit igitur radius paralleli in *I*, ad radium osculi in *i*, ut $C - C^3 x$ ad $1 - 3ccx$. Sunt autem ii radii, ut gradus paralleli in *I*, qui dicatur *G*, ad gradum meridiani in *i*, qui dicatur g. Quare habebitur $C - C^3 x . 1 - 3ccx :: G . g$, sive $Cg - C^3 gx = G - 3ccGx$, adeoque $3ccGx - C^3 gx = G - Cg$, & demum $x = \frac{G - Cg}{3ccG - C^3 g}$, quæ fractio exhibebit rationem $Bl = x$ ad $Cl = 1$, sive *BD* ad *CB*, nimirum ellipticitatem. Solutio problematis inde derivata.

334.

Eadem theoria applicata ad alios tres casus, & alia problemata.

334. Si utriusque gradus latitudo sit eadem, erit $C=c$, & formula $x=\frac{G-cg}{cc(3G-cg)}$. Eâdem autem methodo solvi potest etiam problema, quo dentur duo gradus binorum parallelorum, vel bini gradus meridiani. In primo casu positis gradibus in I, & $i=G$, & g, erit $C-C^3x \,.\, c-c^3x :: G \,.\, g$, & inde $x=\frac{cG-Cg}{c^3G-C^3g}$. In secundo vero casu erit $1-3CCx \,.\, 1-3ccx :: G \,.\, g$, & inde $x=\frac{G-g}{3\times(ccG-CCg)}$, quæ formula ob G parum abludentem a g, & $cc-CC=SS-ss$, parum admodum differt ab inventâ numero 289, nimirum $\frac{1}{3}\times\frac{G-g}{GSS-gss}$. Inde pariter, si detur ellipsis, adeoque Cl, lB, ac ponatur ratio gradus ad radium, sive fractio $\frac{355}{180\times 115}=n$, & fiat pro quavis latitudine, cujus cosinus C, gradus meridiani $n(1-3CCx)$, & gradus paralleli $n(C-C^3x)$, poterit facile construi tabula graduum utriusque generis pro ellipsoide. Patebit autem defectum graduum meridiani a gradu in polo fore $=3CCx$, sive, ut quadratum cosinus latitudinis CC. Gradum autem meridiani fore æqualem gradui æquatoris, ubi $n(1-3CCx)=n(1-x)$, sive $3CC=1$, nimirum quadratum cosinus latitudinis $\frac{1}{3}$ quadrati radii, nempe ipsa latitudo 54°, 44′.

Solutio alterius problematis: fructus ex observationibus.

335. Data autem specie ellipseos, & dato radio osculi in latitudine data, invenitur magnitudo ellipseos prorsus ut num. 284. Porro si gradus paralleli in Gallia definitus in latitudine 43°, 32′ hexapedarum 41618 juxta num. 299 ponatur pro G, tum ii gradus Meridiani, qui habentur in tabella n. 301 pro g; in formula n. 333 obveniunt ellipticitates $\frac{1}{217}$, $\frac{1}{244}$, $\frac{1}{146}$, $\frac{1}{129}$, $\frac{1}{174}$, quarum media $\frac{1}{167}$, sed gradus paralleli incertus est intra limites nimis crassos.

F I N I S.

Pag.	lin.	Errata	Corrige.
3.	24.	que	quæ
7.	1.	utrumque	utcumque
	21.	, etiam	etiam , (nor
30.	11.	itidem eſt major	vix quidquam eſt mi-
	not.3	parallexes	parallaxes
35.	1.	gradus , & minuta	hexapedæ
41.	18.	collimandam	collimandnm
44.	11.	Interamnanos	Interamnenſem
45.	28.	poſſet	non poſſet
60.	18.	dillgentia	diligentia
	36.	perſpectum	proſpectum
63.	8.	acclivæ	acclive
65.	8.	Circærum	Circæum
67.	4.	ſlante	ſlante
71.	22.	conjuximus	conjunximus
72.	32.	collinaebat	collineabat
73.	6.	ætimationis	æſtimationis
	16.	teloſcopio	teleſcopio
	22.	pe	per
74.	7.	potuit	patuit
76.	35.	æquo	equo
80.	30.	im	in
82.	22.	Romandiolum	Romandiolam
94.	33.	apparebant	apparerent
100.	19.	inteiiſſe	interiiſſe
102.	30.	Barberinæ	Burgheſiæ
113.	8.	Vulſinia	Vulſinio
	13.	Pratolenza	Pratolenze
118.	8.	aliquanto	aliquando
119.	25.	cælo	edo
	30.	peracti	peractis
	35.	expeditiones	expeditionis
132.	35.	ptimus	primus
134.	7.	Teſtim	Teſium
	not.2	bali	baſi
142.	33.	diſtanriæ	diſtantiæ
144.	15.	nenique	denique
153.	4.	fore	foret
169.	4.	ſociis .	ſociis ,
171.	10.	aliquam	aliquem
173.	7.	metueremur	metueremus
183.	17.	aliitudinem	altitudinem
192.	not.1	Geometricis	Geometris
193.	30.	quum	quam
194.	1.	fig. 3	fig. 13
	4.	ſerreæ	ferreæ
	8.	adſcrictam	adſtrictam
	28.	habebere	habere
195.	11.	ſiat	fiat
	16.	faraminibus	foraminibus
196.	not.4	ſiius	ſitus
197.	5.	immiſa in eam ap.	immiſſa in eam apert
	7.	teleſcopi	teleſcopii
199.	10.	II'	II', OO'
	17.	EE	EF'
200.	29.	Ii	II'
205.	4.	eſt	&
	21.	ſilo	filo
206.	5.	femipollicis	ſemipollicis
207.	18.	inteſectione ob	interſectione ad
	32.	aptura	apertura
208.	2.	civitate	cavitate
209.	26.	ſuperficiei	craſſitudinis
210.	not.1	ocularis	objectivæ
	18.	$OO''O$	$OO''O'$
211.	11.	circa H	circa H'
213.	1.	In	ln
	15.	DnF	nDF
	35.	ſi	ſi-
	not.1	Tab. 1	Tab. 2.
215.	12.	14 PE'	X
	16.	finem H	finem H'
216.	29.	indiciis	indicis
217.	10.	$CC'G'G'$	CC', GG'
219.	22.	aſſixum	affixum
221.	2.	pedis	pollicis
	6.	traverſa	tranſverſa
224.	17.	ipſum ad	ipſum
	not.3	ciricino	circino
225.	19.	fig. 4	fig. 1
227.	12.	quovis	quivis
229.	9.	levam	lævam
230.	not.2	traditi	traditæ
233.	5.	31	21
234.	4.	$E' \ldots ED'$	$D \ldots EE'$
	12.	utiuſque	utriuſque
236.	34.	Cymi	Cycni
244.	10.	$bt'tt''$	btt'
	13.	complementi arcus	arcus
246.	31.	AB,	, AB
247.	27.	devenient	deveniet
249.	31.	$1'.25''$	$1'.20''$
	33.	$1'.5'.\frac{1}{4}$	$1'.5''$
	34.	$16''$	$16''.\frac{1}{4}$
250.	2.	100	1000
	4.	que-	quæ-
251.	5.	$27''$	$31''$
	6.	$8'.12''$	$8'.8''$
	8.	$8'.12'' .. 8''.21''$	$12''.12'' \ldots 12'.21''$
	20.	errorem	error
	23.	, illud	illud ,
252.	3.	axceſſus	acceſſus
	4.	28	38
	18.	mini	nihil
253.	35.	ſive	ſive parallelo
255.	4.	$I'F'$	$I'F$

Pag.	lin.	Errata	Corrige.
260.	11.	figura	figura 7
262.	28.	*PL*	*PM*, vel proximè *PL*
263.	2.	$b^{\backprime}t$ ad bt	bt' ad $b^{\backprime}t$
264.	24.	esse . Nam	esse , nam
	not.2	a plane	a plano
265.	31.	$Z^{\backprime}O$	ZO
266.	26.	ZL''	ZL'
208.	26.	polo	zenith
272.	34	xe	ex
273.	5.	promutius	promotius
275.	18.	9 49	0 . 49
	21.	sumatur	sumantur
276.	21.	aceecedit	accedit
279.	2.	s	5
280.	not.2	axem	circa axem
283.	not.2	schesma	schema
	21.	*CI*	*Ci*
	34.	in *leCa*	in *Ca*
284.	4.	333	3*t*3
286.	4.	tranversis	transversis
288.	4. 5.	*ah*	*ah'*
	33.	supponitur	superponitur
290.	6.	ipsa	ipsam
291.	22.	quam	quas
	27.	utroque	utroque
292.	8.	demiso	demisso
294.	6.	divisioum	divisionum
295.	35.	numurus	numerus
300.	36.	differetia	differentia
314.	1.	constuctionem	constructionem
	not.1	daplici	duplici
317.	3.	sinus sinus	sinus
	4.	dimidi	dimidii
	6.	dividendo	per conversionem rationis
	32.	radius dimidii ãguli	radius
	34.	tangente	tãgẽte dimidii ãnguli
318.	26.	dividendo	per conversionem rationis
319.	28.	*oris*	*ris*
320.	17.	altero ,	, altero
325.	not.2	Tab. 3 , Fig. 2 12	Tab. 1 , Fig. 2 3 , 12
327.	27.	*BA*	*BA* , *Bc*
333.	23.	*EN*	*MN*
	24.	*ACE*	*CAE*
334.	15.	$1^{\circ}.7''$	$1'.7''$
339.	not.2	priore	prior e
	27.	$7.\frac{1}{2}$	$7.\frac{1}{8}$
342.	not.1	observatione	observationes
	21.	azimathus	azimuthus
343.	30.	ad *An*	ad *An'*
344.	1.	*In*	*In'*
347.	10.	mentis	montis
	29.	temeri	timeri
348.	15.	Demuntur	Demantur
352.	2.	basis	error
	9.	definitæ	definita
353.	7.	ab	ad
359.	25.	dele illud *aliquo conjungendo*	
360.	31.	ade	ade-
362.	16.	*IH*	*IH'*
367.	25.	rectus	rectus , angulus ad F
	30.	*TX*	*FX*
	32.	*Th*	*Fh*
	not.3	adde Tab. 3 ,	fig. 19
368.	4.	*ua*	*Va*
	5.	*ui*	*Vi*
	22.	*H* , *L*	*H* , *I*
372.	4.	*Th*	*Fh*
374.	16.	*BD*	*CD*
378.	22.	longior	brevior
393.	26.	ad *CL*	ob *GL*
394.	28.	*F'V*	*FV*
396.	27.	*KQ*	*Kq*
398.	4.	*VQA* sit	sit
399.	23.	*KCr*	*RCr*
404.	11.	$= u$	n
	14, 15, 17	$(xx + yy)$	$(xx + yy)^{\frac{1}{2}}$
406.	24.	Fac	Fad
	33.	QK^2	$Q'K^2$
407.	3.	*KQ'*	*Kq*
	32.	*CF*	quadratorum *CF*
409.	9.	*KQ*	*Kq*
	14.	*uan*	*aan*
411.	not.	utrumque	utcumque
412.	9.	initio	inito
413.	3.	*F'K'*	*FK'*
	7.	*VdG*	*VQG*
418.	33.	elegentior	elegantior
420.	23.	ihl ad ho^2, ut mC^3	iHL ad Ho^2, ut mC^2
	29.	*Gf*, *Gf*	*GF*, *Gf*
422.	2.	ellipiticæ	ellipticæ
	not.3	continuationis	continuatio
425.	2.	quadam	quodam
	19.	pressionis	pressioni
426.	18.	continum	continuum
428.	8.	& *A*	& *B*
429.	not.3	adde Tab. 4 , Fig.	15 , 16
	13.	ut	ut sit
430.	12.	alteram	, alteram
	16.	*Q* &	*P* , &
	34.	ad *DI*	ad *dI*
432.	5.	angulis	angulos
433.	19.	centrum est	centrum , est
436.	4.	calculum	calculum

Pag.	lin.	Errata	Corrige.
436.	33.	*RD*	*BD*
437.	23.	*AP*	*DP*
441.	14.	$+\frac{1}{s}$	$+\frac{1}{s}x$
448.	11.	arus	arcus
449.	33.	fluidum	ſolidum
451.	9.	amitritur	amittitur
452.	*not.*2	uſui	arcu
453.	13.	cuplicata	duplicata
455.	28.	4300	4300000
	29.	$\frac{1}{2150}$	$\frac{1}{1075000}$
		trigeſima	decimamilleſima
	31.	caſu caſu	caſu
457.	1.) 2.)	$\frac{x}{p}$	$\frac{qx}{p}$
	13.	1640	1740
460,	19.	$\frac{m}{2n}$	$\frac{n}{2m}$
461.	1.	ponetentur	ponerentur
	*not.*2	proximæ	proxima
462.	10.	racedere	recedere
	29.	quamvis	quam vis
463.	14.	vis , quam	, quam
465.	3.	ſphæronidis	ſphæroidis
	6.	ellepticitas	ellipticitas
466.	23.	additamenta	. Additamenta
467.	14.	$3tn \ldots tn$	$3tn \ldots n$
	22.	$\frac{tx}{sp}$	$\frac{tx}{5p}$
469.	3.	$\frac{1}{130}$	$\frac{1}{230}$
	12.	hypotheſeas	hypotheſcas
	14.	hypotheſcos	hypotheſeos
470.	15.	$20mpl$	$20npl$
	19.	ſolido	fluido
	26.	ellipticitate	ellipticitatem
471.	38.	longe	gna
472.	32.	minor	minor ,
473.	21.	contraheret	produceret
474.	4.	in *C*	in F
	*not.*1	graduum	quam graduum
476.	24.	mutati	mutari
477.	7.	marium	Terræ
	36.	amplum	amplam
	*not.*3	pendolum	pendulorum
478.	16.	vauoo	vacuo
480.	18.	$\frac{1}{335}$	$\frac{1}{337}$
	*not.*3	habere eam minus	videri magis
481.	21.	aliubi	alicubi
	27.	ſpemper	ſemper
482.	4.	ſpuperficiei	ſuperficiei
483.	1.	tum arcu	cum arcu
486.	31.	debitari	dubitari
487.	16.	tectum	rectum
488.	31.	ac	ac quadratorum
489.	22.	ed	ad
491.	34.	*AIC*	*HAC*
495.	21.	decremeto	decremento
497.	6.	menſurum	menſuram
	29.	Commientariis	Commentariis
499.	7.	Coſſinus	Caſſinus
501.	31.	obſevationibus	obſervationibus
502.	21.	Bouguegius	Bouguerius
505.	22.	57979	56979
506.	3.	paiore	priore
	15.	hucuſquæ	hucuſque
		Ubicunque occurrit	
		poligonum	polygonum
		ſtamnum	ſtannum
		eccliptica	ecliptica
		Thurry	Thury

Norit præterea Lector primum illud , pag.184 litteras V , *V* , U , promiſcue poſitas eſſe pro eadem unica littera U adhibita in fig. 6, tab.1. Deinde illud, tabulam, quæ habetur in fine opuſculi 3 , impreſſam eſſe poſt reditum Mairii Urbino ; & idcirco Callii , ac Fori Sempronii loca ibi aliquanto accuratius , ac certius definiri , quam in mappa , & quam eſſent , cum primi opuſculi impreſſa eſt pag.119 , in qua de novo ejus excurſu in eam plagam mentio fuerat facta .