



EXPOSITIONIS
PHILOSOPHIÆ NEWTONIANÆ
LIBER II.

Theoria Motus, & Mechanicæ.

C A P U T I.

De Spatio, Tempore, Materia, & Motu.

I. **Q**uemadmodum animus sibi intime con-
sciens, suarumque certus cogitatio-
num, dubitare neminem finit, quod
reapse sit, easque mente agitet;
ita idem certos nos reddit, esse extra nos res
alias, vires, & causas, quæ in nos agunt: et-
enim

enim complures inde in nobis existunt perceptiones, atque illæ cum primis, quas dolor comitatur, quas anima nostra patitur verius, quæque a causis nostro arbitrio non subjectis, etiam frustra obnidente voluntate efficiuntur. Hæc omnia rerum genera duplicum in classem universe commode partimur, quarum prima eorum, quæ vires sibi inditas sponte sua exercendi facultate prædita sunt, semet movendi potestatem, aliasque affectiones possident illis non dissimiles, quas in nobis experimur, cum ratiocinamur, judicamus, volumus, amore, odio concitamus &c. Classe altera rerum extra nos collocatarum illa continentur, quæ hac virium specie destituta, & naturam patiente potius, quam agendo natam, fortita sunt, nunquam se ipsa movent; nunquam, si mota sint, citra causam externam moveri desinunt. Si quando in his motum advertamus, quin motricem causam sensu percipiamus, illico eum actioni rei cuiuspiam alterius, et si sensum omnem fugientis, adscribimus: adeo scilicet de horum inertia persuasi sumus. Quod si istorum quodpiam in locum certum reposuerimus, nunquam fane vel minima nobis occurrit dubitandi ratio, quin illic rursus reperturi simus (nisi forsan ab alio inde dimotum sit), quamvis tempus abierit interea longissimum. Aque hac inertia, locum, conditionemque mutandi potentia, res in alteram relatæ classem a priore discrepant præcipue, suntque corpora, & materia; uti primam animæ, aut spiritus constituant.

2. Illud autem loci hujus non est, ut disqueramus, qua ratione utravis eorum classis, quæ extra nos sunt constituta. mentem nostram afficere,
tan-

tantamque impressionum, ac imaginum varietatem gignere in animo possint ; neque etiam a nobis isthic quis postulet, ut, quam exacte notiones nostræ res ipsas exhibeant, quæve inter utrasque similitudinis ratio intercedat, decidamus. Extra dubium vero videtur, eam repræsentandi speciem, qua prius jam habitæ notiones tantummodo repetuntur, esse illis multo accuratiorem, quas denuo exhibent; & si quem hominem sæpius viderimus, si quo in loco frequentius simus versati, si quam figuram pluries contemplati simus, inde enata notio multo accuratius impressioni in sensus factæ respondet, quam doloris verbi causa, quam ipsimet nobis effinximus, congruat cum sensatione, quam dolorem passi habuimus. Et quemadmodum nullius roboris esset argumentum, si quis eo ex capite in dubium revocare vellet, an aliorum hominum anima ratione prædicta sit, quod ea longe quid aliud esse possit, ac nos mente concipiamus ; ita nihil prorsus adversus res corporeas ex eo conficitur, quod earum intima natura, in qua proprietates cuivis peculiares resident, ab affectionibus, quas in iis experimur, diversa admodum fortassis sit, nobisque ignota. At illud etiam candum, ne parum adeo notionibus, quas de rebus exterioribus habemus, tribuamus, ut non alio eas censeamus loco, quam voces, ac signa mere arbitria, quibus id demum efficiatur unice, ut alias ab aliis secernamus. Etenim iis certe debemus, quod rerum proprietates cognoscamus, quod vim aliarum in alias mutuam, quod actiones in nostram animam, quod rationes, comparationesque earum perspiciamus, quod denique eam habeamus notitiam tum nostri ipsorum,

rum, tum aliorum extra nos positorum, quæ plurimum commodi nobis adfert. Sic profecto, dum inter se se eas conferimus, dum discutimus, de ordine, & perturbatione, de pulchritudine, & deformitate, de consensu vel dissensu rerum a legibus judicium ferimus. Inde quoque numeri, proportionisque profluit cognitio, scientiarum scilicet tam utilium, tam vastarum fundamentum.

3. Vis porro suæ agendi mens nostra intimam habet conscientiam, quando ad notiones suas advertit, eas ad examen revocat, redigit in ordinem, e simplicibus complexas nequit, denique dum ratiocinatur, dum elit, dum decernit. Hinc vero, & e rerum externarum in eam actione, nec non cognitione, quam de naturæ statu jam hausit, causæ, effectusque notitiam facile acquirit. Si ex figuræ cuiuspiam in tabula depictæ aspectu consimilis fere apud omnes, qui eam cernunt, in mente imago enascitur, an dubitet aliquis, esse rei hujus causam aliquam vere effectricem, cum tamen nemo sit omnium, qui postquam ad numerosum auditorem differuit, non existimet, sibi tribuendum esse, quod eo sermone in aliorum mentibus effectum est, quamvis non minus obscurum sit, qua ratione verborum notio in aliorum animos transeat, quam qui fiat, ut figura illa mera in sensus impressione spectatoribus omnibus quodam modo communis evadat? Nec desunt complura alia, quæ adversus oppositam philosophandi rationem adferri possent, eo scilicet deducturam sequaces suos, ut necesse illis sit admittere, res externas una cum nostris perceptionibus mutari, fierique alias, cum vel

ab

ab aliis percipiuntur, vel ab iisdem tempore, loco
alio. At ut isthæc ab operis nostri instituto tam aliena,
quæque, ut omni carent utilitate, ita a communi
hominum judicio dissident, persequamur ulterius,
nemo exiget.

4. Corpus ob propriam fibi inertiam, natu-
ramque, si dicere liceat, passivam, non modo nun-
quam statum suum ex sese mutat, verum etiam cau-
fis mutationem quampiam inducentibus resistit. Cum
quiescit, non absque difficultate movetur; cum in
motu est, certa vi opus est, ut ad quietem redu-
catur. Vis, qua in statu suo perseverare conatur,
ac mutationi sese opponit, vis inertiae appellatur,
atque ex omnium partium, quibus constat, inertia
consurgit, ideoque materiae quantitati respondet, quæ
in corpore continetur, ut non aliunde de hac judi-
cium ferre possimus, quam ex inertia corporis. Et
recte id sane, cum experiamur certissime, dum mo-
lem corporis duplam, triplamve sumimus, vires
quoque duplicandas, triplicandasve esse, ut eadem,
qua simplam, velocitate movere possimus, aut ea
demum impulsu ratione augendum, minuendumve
esse, qua corpus auctum, minutumve fuerit. Et si
quidem partes simplices corporum solidæ, & meati-
bus destitutæ, mole æquales æqualem vim inertiae
possideant, id, quod diximus, semper accurate verum
erit; at vero si materiae sint diversa genera, ut
alterius partes dimensione æquales inertia majore sint
præditæ, quam partes alterius elementares; ut ejus-
dem fortis comparentur corpora, necesse est, ut in-
ertia rationem materiae obtineat. Quamvis autem ni-

hil sit, quo minus varias materiæ classes dari posse credamus; attamen si experientiam spectemus, sola diversæ densitatis, raritatisve ratio, qua intervallorum inanum numerus major, minorve in corporibus constituitur, sufficit, ut inde inertiae discrimen, quod in eadem variorum corporum mole deprehendimus, deducamus.

5. Spatium quaqua versum nullis certis limitibus extenditur, immobile, uniforme, ac omnibus in partibus sibi simile, liberum, resistentiae expers. In se quidem ex partibus constat, quæ in minores alias dividi possint, hæ iterum in alias usque in infinitum; at vero separatio in his partibus, transpositio, atque situs cum contiguis permutatio nulla concipi potest.

6. Corpus in ipso spatio suam habet extensionem; est mobile, certa figura circumscriptum, solidum, impenetrabile, sua inertia actionibus extrinsecis resistens, in partes minores, ac minores in infinitum sectile, quæ etiam inter se separari, situm, ac distantiam infinitis modis mutare possint.

7. Cogitationum, quas quisque habet, successio, ac rerum externarum, quarum e naturæ legibus aliæ sequuntur alias, continuus ordo, facile duracionis, temporisque notiones, nec non mensuræ ejus in nobis generant. Ac tempus quidem verum, ut in se est, æquabilissimo, & nuspian variato fluxu decurrere concipimus, quod solum exacte dimetendiis aliarum rerum mutationibus sit aptum: nisi enim tem-

temporis mensuræ, qua rudi admodum, & parum accurata utimur, necessariæ adhibeantur correctiones (ex Satellitum Jovis eclipsibus, & maxima Astronomicorum phænomenorum parte petitæ) computationes nostræ erroribus sunt obnoxiae. Et quamvis fieri possit, ut temporis fluxus diversis mentibus inæquabilis videatur, idque magis, minusve, ut earum diversa fuerit perfectio; attamen vero non est simile, tempus in se a rei cuiusdam creatæ cogitandi ratione dependere. Tempus in minores partes semper divisum intelligi potest, quin ullus certus limes statuatur, infra quem ejus portiones decrescere tiequeant, licet cuivis rei peculiariter definitum temporis spatiū ultimum sit, quod percipere possit, quemadmodum etiam in aliis magnitudinum generibus *minimum quodpiam sensibile* datur.

8. Motus est mutatio loci, hoc est, partis spatii, quod corpus sua extensione occupat, estque *realis*, sive *absolutus*, dum spatiū absolutum mutatur; *relativus* dicitur, quando corpus solum respectu vicinorum locum alium acquirit, ac *apparens*, si id fiat talium comparatione, quæ nobis quiescere videntur. Et quoniam partes spatii absoluti sensibus non subjacent, inter præcipuas in Philosophia difficultates habetur, ut motus veri ac reales ab iis discernantur, qui tantummodo tales apparent, ex quatenus ambiguitate quandoque se quis expediet, si debitam præcavendis erroribus solertiam adhibeat, motus natura, & proprietatibus in consilium vocatis, ubi jam perspecta sunt, ac legitimo ratiocinio e causis, effectisque deducto. Sic motus circularis nunquam

est sine vi quadam centrifuga, e nisu corporis linea recta progrediendi enata, indeque fit, ut per eam circa æquatorem telluris gravitas minuatur, motusque pendulorum lentior evadat, singulis oscillationibus plus temporis requirentibus, quam prope polum alterutrum, quo argumento motus diurnus telluris circa axem suum liquido evincitur. Ex opposito diurnæ revolutiones corporum coelestium circa terram non nisi apparentes esse possunt; etenim hic motus verus si esset, vim a centro recedendi immensam efficeret, ac dubio procul etiam nobis percipiendam, utpote cum in spatiis liberis perageretur, orbibus illis solidis gravissimis de causis jam dudum e cœlo deturbatis.

9. Evidem non ignoro, esse inter Metaphysicos magni nominis, qui notionem spatii absoluti a nobis datam reprehendant, accusentque Mathematicos, quod ideis suis rerum verarum proprietates affingant; at enim isti si debita cum diligentia motus phænomena accurate circumspicerent, facile animadverterent, iniqua se censura uti. Nemo ignorat, qui rerum creatarum statum perpendit, dari motum; corpus semel ad hunc concitatum, in eodem persistere, donec actione rei alterius, & vi externa eum perdat; verum ex corporum inertia nullum producnisum, ut motum apparentem solum, ac relativum conservent. Sic si motus telluris fisteretur, astrorum omnis diurna revolutio evanesceret, quin minimam illis vim adhibere necesse foret, & si fideris cuiuspiam motus apparens motu alio in partem contrariam impresso tolleretur, reliqua cursus suum tenere pergerent,

vis

vis centrifuga ad æquatoris plagas perseveraret eadem, eadem sphæroidea oceani figura: quæ omnia ex vero Telluris circa axem suum motu verissime consequuntur. Quibus motuum theoria minus perspecta est, citra difficultatem in hoc convenienter, quod corpus quiescens natura iners statum suum per se haud mutare unquam possit, quamvis non item tam manifestum illis sit, corpora semel mota ad quietem ex se nunquam redditura. Verum hic corporis in quiete manendi conatus locum non habet, nisi ad spatium absolutum referatur; neque id sane concipi potest, nisi spatium ipsum ejusmodi detur. Turbinem circa axem suum motum sat diu in gyros agi videmus, ac si quod aliud interea corpus in ejus superficiem decidere finas, illico hoc rejicit turbo, nequaquam secum in circulos abripiet. Quamdiu navis cursu æquabili fertur, corpora in ejus foris collata situm suum, non secus, ac si omnia quiescerent, conservant; ast ubi motus sistitur, versus eam partem impulsa labuntur, quam navis ventis acta spectabat, quæ scilicet inertia sua nequaquam quietem illam, quam navis comparatione habebant, fueri conabantur, sed eum solummodo statum, seu motus, seu quietis, in quo spectato spatio absoluto fuerant. Plura quidem in hanc rem suppeterent, quibus liquido ostendi possit, naturæ phænomena exponi haud posse, nisi motus verus ab apparente; spatium verum, & absolutum a relativo discernantur; verum quid quid obmoveant Philosophi isti, non alterius rei clariorem habemus comprehensionem, quam spatii; & quamvis fortasse non nulla ex iis, quæ pertractanda suscepimus, litibus haud ita facile diri-

mendis occasionem præbere possint, scimus tamen etiam, nihil prorsus eorum, quæ in rerum naturam indagatione occurunt, ab hoc incommodo eximi; nostrum igitur erit, naturæ cognitionem ad eam claritatem, cuius capax est, provehere, eaque firmitate constabilire, ad quam vires nostræ pertingunt; at ut omnibus numeris absolutam nobis promittamus, id utique a ratione alienum foret, ut jam alias (Lib. I.) diximus.

10. Quoniam corpora a mero spatio facile per resistentiam suam, ac inertiae vim discernuntur, evidens est, non omnia ubique spatia materia æque plena esse; quin variæ a Philosophis institutæ observationes manifeste evincunt, etiam in corporibus, quæ densissima novimus, materiæ quantitatem, si toti conferatur volumini, exiguum esse. Radii luminis in omnem partem meatus in globo vitro reperiunt, quos transmittant, non modo luculento exilitatis partium lucis argumento, sed etiam ingentis raritatis vitri. Idem de magneticis, electricisque effluviis omnia pervadentibus quam liberrime, nec non de aliis subtilissimis fluidis corpora in Chemicis experimentis penetrantibus sentiendum. Sed quod ad illas materias subtiles, quas Philosophi corporum meatus explendis, & excludendo ex hoc universo vacuo excogitarunt, quædam superiore jam libro annotavimus, ac etiam deinceps se se dabit occasio, ut ostendamus, quam parum subsidii in iis ad explicanda naturæ phænomena insit, quorum causæ putantur.

11. Spatium, & tempus per motum sese mutuo metiuntur ; ac tempus quidem continuo fluxu evanescit ; spatium vero descriptum rei perdurantis modo concipimus. Dum æquabilibus temporis partibus spatia æqualia motu percurruntur , is æquabilis est , celeritate nulli per id tempus variationi obnoxia ; at si spatia æqualibus temporibus confecta continua quadam ratione crescant , motus est acceleratus , ut ex opposito retardatus , si spatia perpetuo fiant minora. Universe celeritatis mensura est spatium , quod mobile tempore quopiam dato describeret , si ea interea æquabilis , ac constans maneret. Hinc porro manifestum est , spatium motu uniformi percursum esse in ratione composita temporis , & velocitatis. Exhibeat AB , quæ est basis figuræ , tempus , quo motus durare ponitur ; PM vero ad Tab. I. fig. 1. basin normalis , seu ordinata , in quovis puncto P , celeritatem , quam corpus eo momento temporis habet , (hoc est , spatium , quod ea cum celeritate tempore dato post illud momentum æquabiliter confici posset) : erit area hinc genitæ figuræ A BD mensura spati tempore AB descripti. Parallelogrammum rectangulum itaque , cuius basis exponit tempus , altitudo velocitatem , metitur spatium motu æquabili decursum ; at si motus uniformiter acceleretur , hoc est , si corporis velocitas æqualibus temporis incrementis æqualiter augeatur , spati mensura per triangulum exhibetur , in quo basis tempus designat , celeritatem perpendicularis ad basin , quæ in eadem ratione cum basi crescit. Et quoniam triangulum est dimidium parallelogrammi super eadem basi , & ejusdem altitudinis , spatium motu uniformiter acce-

accelerato, dato quovis tempore consecutum, dimidium quoque est illius, quod velocitate in fine temporis acquisita, ac constante interea percurri potuisse. Sunt præterea triangula similia in ratione duplicata laterum homologorum; igitur etiam spatia, quorum mensuræ sunt, motu uniformiter accelerato descripta in ratione duplicata celeritatum esse debent, quæ in fine temporum acquiruntur. Eadem trianguli figura dimetiendo spatio motus uniformiter retardati adhibetur, modo tempus usque ad motus extinctionem accipiatur, ac celeritatum ordo invertatur. In aliis motibus spatia non nisi per areas curvilineas exprimi possunt; & quia curvarum quarundam ea est indoles, ut quamvis in infinitum producantur, ordinatis certa quadam lege perpetuo decrescentibus, areæ nunquam datum aliquod spatiū finitum æquare possint; legitime consequitur, simili ratione celeritatem in motu retardato posse imminui, ut quamvis infinito tempore perduraret motus, spatiū tamen ad datæ lineæ finitæ magnitudinem nunquam pertingeret. Sic si ponatur celeritas prima hora temporis dupla illius, quam corpus hora altera habet; tertia æquare dimidiam secundæ horæ, itaque deinceps, spatiū his motibus quamvis longissima sæculorum serie percursum, nunquam duplum fieret illius, quod intra primam horam est descriptum.

12 Cum motus quantitas ex motu omnium partium corporis consurgat, ea est in ratione composita ex quantitate materiae, & volocitatis. Si massa corporis A sit ut 2, celeritas ut 5; corporis B quantitas materiae ut 3 moveatur celeritate ut 4;
quan-

quantitas motus corporis A erit ad quantitatem motus corporis B in ratione composita ex 2 ad 3, & 5 ad 4, hoc est ut 2×5 ad 3×4 , seu ut 10 ad 12. Facile autem intelligitur, nullam esse rationem, ob quam inter quantitatem motus corporis, & inter vim corporis moti, discriminem statuatur, quoniam tota vis, & energia corporum ab eorum motu dependet. Attamen illud nemo requisiert, ut omnis motuum effectus sit eorum quantitate definitus, nisi secundum vera Mechanicæ principia & temporis, & directionis, juxta quam actio fit, ratio habeatur. Corpus vi motus æquabilis dato tempore datum percurret spatium: at nullum tam magnum spatium effungi potest, quod idem non describeret, si nullus temporis limes figeretur; & dum corpus in alterum corpus agit, varii omnino sunt effectus, qui secundum varias directiones eduntur. Accuratius sequente Capite ostendemus, quam necessarium fit, ut rerum harum exacta ineatur ratio, quando motus, & actionum corporum effectus indagari debent.

13. Dum corpus ad motum tendit, at vero per obstaculum aliquod impeditur, is nifus pressio dicitur, quæ non magis cum motu comparari potest, quam linea cum rectangulo ejus motu genito. Hujus generis est gravitas corporis alicui plano incumbens, aut aquæ in fundum vasis prementis, aut aeris vela navis impellantis. Sublato obstaculo actio continua pressionis motum efficit in corpore tempore finito, quemadmodum gravitas Corporum cadentium motum omni momento ea impellendo accelerat. Dum aquæ per foramen in fundo vasis exitus datur, pres-

sio incumbentis accelerat motum effluentis, velocitate tempore quam minimo maximum, ad quem pervenire potest, gradum acquirente. Ventus quoque navim deferens sub initium velocitatem auget continuo, donec una cum celeritate navis crescente resistentia aquæ, venti actio cum resistentia in æquilibrio sit. In allatis, aliisque similibus exemplis motus a quiete incipit, fitque continua vis motricis, seu pressionis actione, ut velocitas finita tempore finito generetur. Quod si quavis actione potentiae celeritas finita efficeretur, motus tempore utcunque exiguo infinitus evaderet, omnemque celeritatem, quam quis mente concipere potest, excederet, uti alias demonstravimus. (Tract. de flux. § 44.)

14. Inter omnes vires, seu pressiones maxime nobis cognita est gravitas. Corpora eadem velocitate in vacuo descendunt; quare necesse est, ut gravitas eorum massæ modum sequatur, nec seu a figura, seu partium plexu, sed a sola materiæ quantitate dependeat. Evincunt hoc summa cum evidencia pendulorum experimenta quam accuratissime instituta. Longitudinibus enim pendulorum æqualibus, licet corpora volumine, & textu partium tum interno, tum externo admodum inter se differant, eorum vibrationes in arcibus æqualibus tempore exacte eodem peraguntur, estque velocitas in punctis homologis arcuum, quos describunt, eadem, modo inæquali aeris resistentia hæc oscillationum concordia interturbetur. Hujus rei veritas ita universæ hominum animis insidet, ut in omni rerum usu corporeæ

De Spatio , Tempore, Materia, & Motu. 139

poreæ massæ quantitatem e pondere desumant, quamvis ambientis aeris diversa constitutio huic mensurandi rationi in rebus majoris momenti aliquid accuratioris demat. Licet vero corporum gravitas e nisu eorum versus omnes telluris partes proveniat, ut deinceps patebit; attamen cum hæc vis agat quaquaversum, ac directionem fere ad centrum iis tribuat, id causæ est, cur vis centripeta vocetur. In sequentibus manifestum faciemus, similes vires centripetas dari, quæ in solem, & alios Planetas tendant. Harum virium triplex est species: vis *absoluta*, cuius mensura est motus, quem in corpore dato ad datam distantiam efficeret; exempli causa, vis centripeta absoluta in solem tendens, est ad vim centripetam in tellurem, ut motus corporis ex data distantia extra solem a vi centripeta solis genitus, ad motum ejusdem corporis in eadem distantia a tellure a vi centripeta telluris effectum. Quemadmodum enim dum vires duorum Magnetum metiendæ sunt, effectus ab iis in æqualibus distantiis præstigi comparandi sunt; sic etiam, quando vires absolutas ad corpora in centro posita tendentes æstimamus, comparatio æqua non est, nisi instituatur inter effectus iisdem conditionibus editos. Altera virium centripetarum species est vis *acceleratrix*, quam metitur velocitas, quam dato tempore generat, ac variis in distantiis a corpore centrali varia est, neque a corporum gravitantium massa dependet, utpote eadem in omnis generis corporibus, quando intervallo a centro est idem. Tertia denique species est pondus, seu vis *motrix*, quæ a motu in corpore gravi tempore dato effecto desumitur, estque idem in-

ter hanc, & vim acceleratricem discrimen, quod inter motum, & ejus velocitatem intercedit.

15. Quoniam gravitas tam accurate nobis perspecta est, cum in aliarum quarumvis virium proprietates inquirimus, semper nobis curæ est, ut eas ad gravitatem referamus, earumque ad hanc rationem eruamus. Sunt autem quam diversissimæ in rerum natura vires gravitati analogæ, uti illa, quæ fluidorum particulas in guttas conglobat, qua corporum duorum moleculæ inter se cohærent, qua radii lucis, cum in aquam, aut vitrum, aliudve quodvis medium vi majore refringendi præditum, ingrediuntur, constante quadam ratione versus perpendiculum inflectuntur, & cum sufficiente obliquitate in posticam vitri superficiem incidentes, ex integro reflectuntur, quamvis nullum trans vitrum sit medium huic effectui præstanto aptum; non secus scilicet, quam corpus grave oblique in altum projectum, descripto arcu curvæ cujuspiam, propria sua gravitate rursus in terram relabitur. Hæ, aliæque consimiles naturæ vires, quamvis gravitatis quadam ratione sint æmulæ, attamen ad distantias multo minores sese extendunt, aliisque subjacent non nihil legibus; & quia plurimum semper difficultatis sese in earum explicatione ad leges Mechanicas exæcta objecit, alii effuvia e corporibus emanantia, & atmosphæræ speciem, qua ambirentur, excogitarunt, alii vortices invenerunt; at eventus plerumque conatum destituit adhuc, ut quamvis certissimum sit, soleque meridiano clarissimus, potentias hasce in rerum natura dari, atque per eas præcipua édi phænomena;

cau-

causæ tamen earum sint ut quam maxime abditæ, tenbrisque, quas vix discutiemus unquam, obvolutæ. Interim quotiescumque corpora alia agunt in alia, quamvis inter se diisita, atque ad sese accedere nintuntur, nulla apparente causa, quæ ea impellat, vis hæc *attractio* dici consuevit, qua voce Newtonus frequenter utitur, ea tamen circumspetione, ut moneat lectorem, quod dum id vocabuli adhibet, nulla ratione vis hujus naturam definire velit, agendive modum; quin palam, sæpeque fatetur, corporis in corpus actionem nullam esse posse, nisi mediis aliis corporibus. Illud vero momenti summi in omni Philosophia existimandum est, ut exiguo virium communium numero in rerum natura maxima cum evidētia stabilito, leges earum definiantur, ac quæ inde conlectaria existunt, deducantur, licet causæ harum virium adhuc nobis obscuræ sint; id, quod Newtonus magno cum scientiæ emolumento præstítit.

16. At vero attractionis vocabulum quamvis maxime opportunum sit ad inutilem, ac tædii plenam verborum circuitionem evitandam; quoniam tamen non nulli e Scholasticis eo usi sunt, ut ignorantiae suæ velum prætenderent, Newtoni adversarii hinc quæsito colore ipsam ejus doctrinam impetrare, atque risui exponere sunt conati, frustra scilicet monentis, quo consilio eam vocem adhiberet. Nempe id ea re efficiunt, ut dubitare non possimus, eos vel Newtoni cogitata non assequi, vel ad hanc discussionem nec animum partium studio liberum, nec attentionem debitam attulisse. Ipse Leibnitzius, an-

tequam iis sese adjungeret, idem vocabulum, notio-
ne eadem adhibuit, quod in aliorum quoque, apud
quos accurata loquendi ratio a nemine desideratur,
Philosophorum scriptis frequens occurrit, quin, ut
a Newtono factum, cautum sit, ne qua significatio
a mente eorum aliena huic voci tribuatur. Verum
enim vero sunt quædam in scientiis usitatæ voces,
quibus si quis dextre uti norit, adversariis suis ne-
gotium faceisset, fallet incautos, a sincera veritatis
indagatione avertet; quod quam infra Philosophiæ
dignitatem sit, nemo non videt. Interea nemo unus
fuit omnium ex iis, qui scripto impugnarunt New-
tonum, qui non hoc argumenti genere diffuse egis-
set, quamvis fundamento omni destituto, exhibitis
non nunquam omnibus ornamentis, quæ seu festi-
vum ingenium, seu eloquentia suppeditare potest. Quod
si Lector id laboris suscepit, ut eorum commen-
ta cum Newtoni expositione conferat, advertet il-
lico, quam longe ab ejus mente absint, atque hoc
tandem arte, scientiaque omni sua affecitos eos esse,
ut cerebri sui partum non sine lepore in luce posui-
se existimentur. Fuerint fortassis quidam in sana
Philosophia parum versati, qui fibi persuaserint,
posse corpora sese attrahere mutuo quodam illicio, ac
vi incognita, citra impulsuM ullum aliorum corpo-
rum, & actione qualibet externa; fuerint alii, qui
materiam ad mutuam conjunctionem tendere ex na-
tura sua sint arbitrati, quamvis id inertiae, de qua
diximus, omnino aduersetur; at id genus opiniones
non sine injuria Newtono tribuentur, qui non obscu-
re mentem suam aperuit, seque existimare testatus
est, vires istas provenire ex medio quodam æthe-
reo,

reo , & subtili per hoc universum diffuso , ac corporum majorum meatus penetrante . Ex literis ad Boyleum (*) datis sane liquet , id eum dudum sensisse , unamque causam fuisse , cur non scripto sententiam hanc suam explicuerit , quod defectu sufficientium observationum , & experimentorum nondum eo pertigerit , ut naturam hujus medii , agendique rationem , qua præcipua naturæ phænomena ederentur , ita definire posset , ut mens acquiesceret . Illi porro , qui existimant , a Newtono nil aliud præstatum fuisse , quam quod uno , alterove novo vocabulo Lexica Philosophorum ditarit , nullo interim scientiæ augmento , facile errorem dediscent , ubi expenderint apud animum , quam luculente prima ria Systematis Mundani phænomena ex his viribus explicata dederit ; quam acute ad calculos materiæ solaris quantitatem , & densitatem plurium planetarum revocaverit ; quam feliciter , atque ad verum proxime , motum nodorum orbitæ Lunaris ex causa sua deduxerit ; denique quam accurate non nullas hujus sideris anomalias , aliosque Systematis Planetaryi motus constituerit . Verum diutius fortassis , quam necesse erat , his immorati sumus : quando enim Philosophorum nullus religioni sibi dicit , dicere , a magnete ferrum , a corporibus electricis , ubi eorum vis frictione excitata est , alia leviuscula corpora attrahi ; vel id concedendum est , ut non minus accurate dictum existiment , si audiant , a terra attracti gravia , quæ omnia multo certius versus hunc

glo-

(*) Vide vitam Boylei , quæ præfigitur postremæ ejus operum omnium editioni .

globum descendunt vi eorum materiæ respondente, quando distantia est eadem; sed secundum legem non ignotam mutabili, dum intervalla descensus diversa sunt.

C A P U T II.

De Legibus Motus, & quæ inde generatim consequuntur.

I. *L*Ex prima motus est, *corpus perpetuo perseverare in statu suo quietis, vel motus uniformis in directum, donec a causa quæpiam externa mutatio inducatur.* Observationes obviæ, & quotidianæ, nec non ipsa natura iners corporum, facile equidem nobis persuadent, corpus ex se in quiete persestare; at illud haud æque evidens videtur, quod etiam, quantum ex se est, non secus in motu perseveret; ipsis Philosophis subinde res conceptu non facilis habita est, dum causam *motus continuati* sibi exponi postularunt. Verum non minus ad naturæ legem hoc pertinere, quam alterum, planissime intelligitur. Et quamvis motus omnis, quem in corporibus efficimus, paullo post langueat, tandemque extinguitur (id, quod vulgo persuasit, motum per se continuo imminui, ac ad quietem tendere); hu-

hujus tamen rei causa non difficulter perspicitur, ut pote cum corporibus in motu constitutis tot, tamque varia obstacula objiciantur, maxime vero attritus ad alia corpora, & frictionis. Quod si enim quavis demum arte hæc minuantur, motum longe diutius perdurare advertimus. Sic dum attritus axis rotæ suppositis minoribus trochleis, quæ in eandem voluntur partem, minor redditur, rota major non nunquam etiam dimidiæ horæ spatio moveri pergit, ubi semel impulsæ est. Turbo cupreus, si axe in cuspidem tenuem desinente instructus sit, super tabula vitrea multis minutis horariis circumagi videtur. Pendulum dextre suspensum oscillationes longo tempore peragit, licet aer ei perpetuo resistat. Ex his vero satis apparet, quod si attritus, aliaque impedimenta ex integro tolli possent, motus futurus esset perpetuus. Sed major adhuc evidentia huic veritati accedit, si perpendatur, corpus in foris navis alicujus collocatum quietum persistere, quamdiu navis motu æquabili fertur: idem autem est, seu corpus ab altero delatum moveatur, seu per se motum in recta linea recipiat, atque spatium quodpiam percurrat. Quod si jam corpus in motu constitutum ex se ad quietem redire conaretur, sequeretur fane, etiam in navi æquabiliter delatum debere versus gubernaculum recedere, quod non minus mirabile videretur, quam si corpus ex quiete per se ad motum transfiret. Atque hinc est, quod motus teluris circa axem suum nulla ratione afficiat motus corporum in ejus superficie constitutorum; hinc motus navis aquis currentibus abreptæ ab iis non sentiuntur, qui in navi sunt, nisi attentione ad res alias,

T

quas

quas immotas esse sciunt, uti sunt littora, ac fundus maris, aut per observationes Astronomicas de eo sepe reddant certos; hinc denique motus Planetarum, & Cometarum in spatiis cœlestibus liberis a medio resistente, opus non habent novis impulsibus, ut perpetui sint.

2. Ad eandem legem pertinet, ut corpus nunquam sine quapiam vi extranea directionem sui motus mutet; quemadmodum etiam ex natura sua inerte nunquam velocitatem suam mutat. Quoniam enim corpus sepe mouere nequit, si motum suam directionem posset mutare, qui quæso ad hanc potius, quam ad aliam sepe ipsum impelleret? Verum etiam hac in re legi allatae experientia consenit. Globus partibus homogeneis constans in plano lævi impulsus motum suum in eadem recta peragit, nullac ab ea deflectit, donec attritu, & aeris resistentia eum prorsus amittat. Et si quandoque globulus in tabula tudiculari aliquantum progressus, dein eandem rectam velut sponte remetiri videatur, id tamen ex eo tantum contingit, quod globus simul, dum in tabula progreditur, circa axem suum directione opposita gyretur, quo fit, ut extincto motu translationis in tabula, globus retrorsum volvatur, donec etiam hic motus affrictu pereat. Globus sursum projectus, ex gravitate equidem recidit, ac curvam quandam describit; attamen semper in plano eodem, ad horizontem perpendiculari, movetur, juxta quod primo impulsus est, quin ex illo exerret, nisi forsan ob motum gyrationis circa axem suum per aeris resistentiam unam versus partem fortioriem

tiorem tantillo declinare ab illo cogatur. Denique si corpora per se directionem suam mutare possent, non conservarent suum situm, quando ab aliis, quibus, incumbunt æquabiliter antrorsum feruntur, quemadmodum quotidie experimur. Igitur uti corpus ex se iners motum, ac motus directionem ab alio recipit, ita sine ulla mutatione utrumque conservat, donec vis externa quædam in illud agat. Lex hæc universe quidem velut manifestissima recipitur; at vero ne quidem Kepleri tempore satis intellecta est, ut superiore libro diximus, cum de hujus Philosophi doctrina ageremus. Ex eadem vero patet, cur in Philosophia causa nulla requiratur motus perdurantis, aut cur is uniformis in linea recta peragatur; quod si motus incipiat, qui prius non erat, si acceleretur, retardeturve, aut si directio mutetur, tum vero Philosophi erit, in vires, & causas hujus mutationis inquirere. Et ut Newtonus advertit, præcipuae Philosophiæ partes sunt, invenire motuum datorum vires effectrices, aut datarum viuum motus.

3. Lex altera universalis motus est, mutationem motus esse proportionalem vi eam efficienti, fieri que secundum lineam rectam, juxta quam vis hæc agit. Sic dum acceleratur, ut fit in gravibus linea perpendiculari cadentibus, acceleratio fit e proportione potentiae acceleratricis in gravia agentis. Si corpus oblique per planum inclinatum descendat, motus acceleratio non respondet gravitati toti corporis, sed ei tantum parti, quæ secundum plani directionem agit, uti clarius patebit, dum de virium

T 2 resolu-

resolutione agemus. Dum fluidum corpus quodpiam impellit, ut aqua palmulas rotæ molariæ, ventus vela navis, aut alas molendini, motus acceleratio non adæquat vim integrum horum fluidorum, sed eam tantummodo partem, quæ reapse palmulas, aut vela premit, ac ab excessu velocitatis fluidi dependet supra celeritatem, quam jam acquisiverunt rotæ palmulæ, seu vela navis. Quodsi enim aquæ, vel æteris velocitas accurate æqualis esset velocitati rotæ, aut navis, fluida hæc insequerentur tantum palmulas, aut vela, at nullam prorsus vim ad eorum motum accelerandum, vel retardandum exerere possent. Interest simul isthic potissimum, ut directionis, secundum quam nova vis imprimitur, ratio habeatur, ut mutatio motui inducta definiri possit. Etenim insigniter hallucinaretur, qui existimaret, accelerationem motus navis secundum directionem, qua fertur, congruere cum vi impressa, quando in vela oblique agit, sive dum velorum situs obliquus est ad navis directionem. Quippe prius motus mutatio æstimari debet juxta directionem ipsius vis impressæ; dein vero rectâ principiorum Mechanicorum, ac Geometricorum applicatione inveniendum, quæ mutatio inde navi in sua propria directione accidere potuerit. Dum gravitas, aut alia vis centralis in corpus agit, quod directione obliqua ad rectam a corpore ad centrum ductam movetur, mutatio motus nequit respondere vi toti centrali in corpus illud agenti, sed ejus portioni, quæ vi tota rite resoluta secundum corporis directionem agere deprehenditur. Ex his autem constat abunde, quam amplius sit harum legum usus in doctrina motus.

4. Tertia lex motus itidem communis est, actionem, & reactionem esse aequales, & oppositas, ac debere semper secundum eandem rectam estimari. Corpora non solum nunquam ex se ipsis statum suum mutant, sed etiam inertia sua omni actioni resistunt, qua mutatio in eorum motum inducitur. Dum duo corpora sibi occurrunt, quodvis nititur motum cæptum retinere, atque omni mutationi sese opponit; & quia mutatio, quæ in utrovis efficitur, tam actioni, quam in alterum exercet, quam resistentiæ, quam in altero superare debet, æque debetur, consequens est, ut mutatio utriusque aequalis sit, attamen secundum directiones oppositas fiat. Neutri quidpiam novæ vis accedit, nisi quod alterum in ea directione perdit; neutrum perdit quidpiam, nisi quod alteri accedit. Hinc est, quod quamvis motus impactu mutuo ex uno in alterum corpus transferatur, summa nihilominus motuum secundum eandem directionem acceptorum eadem semper maneat, nec alterius in alterum actione mutetur. Quando igitur hæc summa accipitur, signis contrariis exhibenda est, corporibus in plagas oppositas tendentibus. Motus enim in orientem contrarius est motui in occidentem, ut si summa motuum versus occidentem petatur, is, qui in ortum dirigitur, velut negativus haberi debeat, aut ex altero subtrahi. Unde lex præsens etiam illum usum habet, quod primam universaliorem reddat, atque aptam, ut cuivis corporum numero applicari possit; quemadmodum enim ex prima lege fit, ut corpus quodvis in statu suo seu quietis, seu motus uniformis in directum, perseveret, donec per causam externam ab eo di-

moveatur; ita hujus consectorium est, *summam motuum corporum quotunque, si ad datam directionem omnes referantur, mutuis eorum actionibus, & impulsibus non mutari, sed persistere eandem, donec vi extrinseca interturbentur.*

5. Veritatem tertiae hujus legis ingens experimentorum numerus confirmat, quæ mutua omnis generis corporum percussione instituuntur. Non nulli tamen magni ingenii Philosophi in errorem lapsi videntur, dum saepius longe aliam ei notionem supposuerunt, atque ideo, ne in eundem offendamus lapidem, cautione opus est. Qui recentiori de vi rium mensura opinioni adhærent, easque ajunt in ratione composita ex simplici massarum, & duplicata velocitatum esse, in difficultates inexplicabiles incurront, dum de actione, & impactu corporum perfecte durorum, ac omni vi elasticæ destitutorum quaestio est, ut cum sua doctrina rem concilient. Atque hinc quidam eorum, ut sepe perplexo hoc negotio expedirent, fieri posse negarunt, ut in rerum natura id genus corpora dentur, iis scilicet argumentis nixi, quorum imbecillitatem jam priore libro ostendimus. Alii eo obtentu a se onus explicandi impactum, ac collisionem corporum perfecte durorum amoliri sunt conati, quod nullum hujusmodi corpus in hoc universo noscent; rati nempe, hanc causam omnibus probatum iri, quamvis interim iidem multi sint in explicando conflictu corporum perfecte elasticorum, quorum tamen nullum uspiam reperitur. Et certe majoris ponderis sunt argumenta, quæ perfectam in corporibus duritiem dari posse

evin-

evincunt, quam quibus perfecta elasticitas iis competere ostendatur; quandoquidem tandem necesse est, ut dicatur, quod ultimæ partes elementares, sive atomi omnibus intervallis vacuis destitutæ, inflexiles sint, & perfecte duræ, quæ in collisione corporum cedere nequeant. Verum ut collide etiam hæc in favorem adamatae opinionis comminiscantur, in easdem difficultates eos conjicit impactus corporum mollium, ideoque novæ excogitandæ sunt trochleæ, quibus ex iis sese evolvant, ac phænomena suæ sententiæ accommodent. Quippe si corpus molle velocitate u incurrat in alterum itidem molle, & æquale, post impactum, velut in unum coalescentia, progre- diuntur ambo velocitate $\frac{1}{2} u$, & quantitate motus æquali illi, quem corpus incurrens ante conflictum habuit, vi legis universalis tertiae. Secundum novam sententiam vis incurrentis ante ictum fuit $u u$; & vis utriusvis post ictum est $\frac{1}{2} u \times \frac{1}{2} u$ sive $\frac{1}{4} uu$, indeque summa virium $\frac{1}{2} uu$, ut consequenter hæc post ictum sit tantum dimidia virium ante ictum, manente interim motus quantitate eadem citra ullum discrimen. At enim in eo difficultas est, ut ratio reddatur, cur dimidium virium, quas corpus ante incursum in alterum habuit, perdatur? igitur nullo alio novæ opinionis argumento allato, id asserunt fieri, quod, dum partes corporis mollis elasticitate destitutæ in conflictu cedunt, ac comprimuntur, quin ad pristinum situm redeant, in ea compressione pars vi- rium pereat, quamvis vim a corpore amitti non vi- deamus alias, nisi dum ea corpori alteri communica- tur. Verum est, partes corporis mollis in conflictu loco suo cedere, atque virium portionem perire in cor-

corpore incidente, quæ hunc in modum partibus quiescentis accedit; at enim hæ ipsæ partes ab incidente impulsæ vim suam non possunt amittere, nisi communicando eam partibus aliis, aut nisi ea motui totius massæ accedat, ut adeo nulla sit ratio adstruendi virium decrementum per compressionem, aut cessionem corporum mollium in conflictu, neque aliud commodi insit huic novæ vires mensurandi rationi, nisi quod systemati, cuius gratia excogitata est, faveat.

6. Ceteris opinionis hujus patronis doctior, & sagacior magnopere a vero legis tertiae sensu aberrare videtur, dum ait, conservationem summæ motuum absolutorum in conflictu corporum adeo arcte, & evidenter connecti cum æqualitate actionis, & reactionis, ut qui eam argumentis evincere vellet, nil ageret aliud, quam ut rem claram redderet obscuram, cum augmentum, aut decrementum virium in uno, necessario consequatur ex decremente, vel incremento virium in altero. At enim lex hæc universalis est, atque ad omnes corporum species pertinet; nec minus scitur, quando corpora mollia sibi occurrent directionibus oppositis, summam motuum eorum absolutorum, seu virium, imminui, ac ex integro quietem perire, si massæ eorum, velocitatesque sint æquales. Ut adeo non summa virium, aut motuum in se spectatorum, sed secundum eandem directionem acceptorum in conflictu permaneat, nec in ullo corporum genere conservatio virium absolutarum tanquam consectarium hujus legis haberi possit. Imo vero in ipsis corporibus perfecta elasticitate præditis summa motuum absolutorum quandoque

que per conflictum crescit, quandoque decrescit, ideoque ostendendum erat prius, summam virium absolutarum (quæcunque eas mensurandi sit ratio) citra mutationem in corporum impactu conservari, præcipue dum ipsi fatentur, infinitam varietatem subire hanc summam tempore illo exiguo, quo actio corporum perdurat, ac partes prius loco suo cedentes, dein situi suo restituuntur.

7 Idem Philosophi hanc legem, aut partem ejus præcipuam, haud recte intelligunt, dum actionis, & reactionis mensuram non in eadem linea accipiunt. Celebre est illud argumentum, quo sententiae suæ firmitatem adstruere conantur: ostendunt nempe, a corpore celeritate ut 2 lato, posse tendi quatuor laminas elasticas, aut earum resistentiam superari, quarum quævis habet vim æqualem corpori, cuius velocitas foret ut 1. Ex quo inferunt, hac conditione moti corporis vim esse ut quatuor, quamvis ejus celeritas tantum sit dupla velocitatis corporis secundi. Simili ratione ex eo, quod corpus motum velocitate, quæ sit ut diagonalis parallelogrammi rectanguli adæquet vires duorum elatterum, qui sint ut latera illius parallelogrammi, confidere nituntur quod vis corporis lati celeritate, quam exhibeat diagonalis, æquetur virium summae duorum aliorum, quæ sint ut latera ejusdem rectanguli. Et quoniam quadratum diagonalis æquale est summæ quadratorum laterum binorum, concludunt, vires corporum æqualium esse ut quadrata velocitatum. Verum in omnibus hisce (licet hæc præ certis speciem veri concilient eorum opinioni, atque incautum lectorem in errorem inducere possint longe citius, quam alia omnia, quæ sententiae suæ

gratia excogitarunt adhuc) illud non perpendunt, quod vis a corpore amissa nequaquam æquetur illi, quæ ab altero acquiritur, vel in altero, in quo agit, destruitur, si æstimatio fiat directione quavis arbitrario assumpta, sed solum si accipiatur secundum directionem corporis agentis. Neque attendunt, per inertiam corporis fieri debere, ut non modo resistat mutationi quantitatis motus, sed etiam directionis, & cuvis alteri. Quando Planeta quispiam in orbita circulari revolvitur, ejus gravitas versus centrum virium solummodo in mutationem directionis toto periodi tempore impenditur, quin vel minimum augmentum, vel decrementum motus ipsius efficiatur. Verum hæc omnia longe clariora fient, postquam de compositione, & resolutione motus egerimus. Illud observasse in præsens sufficiat, quod Philosophi isti suæ opinionis gratia, quæ eis tantopere cordi est, omnem motus theoriam, quæ de se tam clara, ac simplex, quam elegans est, perturbent, dum jam temporis rationem nullam habent, jam directionum, quibus corpora seu in se mutuo agunt, seu in elatteres, nullum faciunt discrimen, cum ea omnia, quæ ex sua doctrina deducere conantur, atque consideratione digna sunt, & longe concinnius, & methodo nulli exceptioni obnoxia, e legibus motus, si, ut oportet, applicentur, atque sensu vero accipientur, deriventur.

8. Primum Corollarium, quod Newtonus e legibus motus deducit, est, quod, dum duplex vis eodem tempore in idem corpus agit, corpus motu composito ex utraque vi percurrat diagonalem paral-

parallelogrammi , cuius utrumvis latus eodem tempore, una virium separatim agente, conficeret. Moveatur corpus A (fig. 2) directione AB , quæ simul Fig. 2. ejus motum exponat , & imprimatur simul eidem corpori motus alias , cuius directionem , & quantitatem exhibeat AD : compleatur parallelogrammum ABCD ; movebitur corpus in diagonali AC , eamque eodem tempore percurret , quo vi primi motus descripsisset latus AB , vel vi secundi latus AD . Ut demonstratio a Newtono data recte intelligatur , tanquam evidens sumendum est , quod si potentia quævis agat directione parallela ad lineam positione datam , nullam omnino vim habeat , qua efficiat , ut corpus ab ea linea recedat , vel ad eam accedat , sed id solum possit præstare , ut corpus moveatur directione parallela ad datam rectam , quemadmodum ex altera lege manifestum est. Hinc motus in directione AD nequit accessum corporis A ad lineam BC seu impedire , seu accelerare: atque ideo eodem tempore corpus pertinget ad lineam BC , ac si nullum prorsus motum in directione AD haberet. Similiter quoniam AB ad DC parallela est , motus per AB corpori impressus nec accessum ad DC impedit , nec etiam promovet ; unde eo tempore perveniet ad DC , quo pervenisset contra motum in directione AB , solo motu AD agente. Quare necesse est , ut corpus ad utramque lineam BC , DC eodem tempore veniat , quo solo motu primo percurrisset AB , vel solo motu secundo AD . At fieri nequit , ut ad utramque lineam BC , DC , simul perveniat , nisi in communis intersezione C ; igitur si corpus simul dupli- ci vi impellatur AB , & AD , ex A in C move-

tur, & diagonalem AC, eodem percurrit tempore, quo separatis agente vi utravis, latera AB, & AD descripsisset.

Fig. 3. 9. Quoniam præsens corollarium usum habet amplissimum, operæ pretium est, ut illud paullo pluribus illustremus. Ponatur (fig. 3) planum EFGH motu æquabili ferri directione, & velocitate AB; & corpori A in hoc piano constituto simul imprimi motus directione, & celeritate AD. Iis, qui in plano EFGH mobili sunt positi, corpus A videbitur recta AD moveri, cum motus illius reapse fiat in diagonali AC parallelogrammi ABCD; & tempus, quo AC percurritur, erit idem, quo a piano mobili EFGH, aut quovis ejus puncto describitur recta æqualis datae AB, sive quo a corpore A describeretur AD. Nam liquet, ipsam lineam AD a piano mobili transferri in BC, ita, ut punctum D veniat ad C, ut adeo corpus A in diagonali AC progredi necessum sit.

Fig. 4. 10. Porro e converso inferre hinc licet, motum per diagonalem AC expositum resolvi posse in duos alias, qui secundum directionem laterum AB, AD parallelogrammi fiant. Etenim si accipiatur AK æqualis, & directione opposita rectæ AD, compleaturque parallelogrammum AKBC (fig. 4) manifestum est, rectam AB esse ejus diagonalem, ideoque, ut e posterioribus duobus articulis deducitur, motibus AC, & AK (æquali & opposito motui AD) inter se compositis describi, hoc est, si ex motu per diagonalem exhibito subtrahatur motus per

per latus quodvis **AD** expositus, restare motum secundum alterum latus **AB** parallelogrammi **ABCD**.

II. Hæc clariora fient, si uterque motus per latera **AB**, **AD** expositus in duos resolvatur, quorum alter directionem diagonalis habeat, alter ad eandem sit perpendicularis (fig. 5), hoc est, si **AB** resolvatur in **AM** & **AN**, & **AD** in **AK** & **AL**. Nam quia triangula **ADK**, **BCM** similia, & æqualia sunt, est **DK** = **BM**, sive **AL** = **AN**, ita, ut motus **AL**, **AN** æquales, & oppositi se se mutuo elidant: & quia evidens est, motum in recta quavis non affici, vel mutari actionibus ad eam rectam perpendicularibus, si hæ actiones, æquales & oppositæ sint; facile intelligitur, cur corpus **A** semper in diagonali **AC** progrediatur; & cum præterea **AK** = **MC**, etiam patet, cur idem corpus viribus residuis impulsu[m] motum habeat, quem diagonalis accurate metiatur. Hinc etiam manifesta fit causa, ob quam in compositione motuum aliquid virium absolutarum perdatur; quod scilicet motuum **AD**, **AB** partes **AL**, & **AN** æquales, & directe oppositæ se se mutuo elidant, partes vero residuae **AM** & **AK** solæ secundum directionem motus compositi **AC** addi possint: ex op[er]o etiam clarum est, in resolutione quantitatem motuum absolutorum fieri majorem, cum **AB**, & **AD** sive **BC** simul, semper excedant motum **AC**. At enim si motus æstimatio fiat secundum directionem aliquam datam, is nullo modo afficitur, aut mutatur per resolutionem, vel compositionem, nec actionibus quibusvis corporum, vel virium, æqualibus,

Fig. 5.

Fig. 6. bus, & directionibus contrariis. Fingatur enim, quod quantitas motus referatur ad directionem AP (*fig. 6*); sintque CP , BR , DQ ad AP in punctis P , R , Q normales: motus AC , AB , AD ad directionem AP reducti erunt AP , AR , AQ , cum partes ad AP perpendiculares secundum hanc directionem nihil agant. Occurrat AP rectæ CB in S ; quoniam $RP: SP = BC$ (sive AD): CS , hoc est $= AQ: SP$, erit $AQ = RP$, & $AR + AQ = AP$, hoc est, summa motuum AD & BD , si hi ad directionem datum AP reducantur, æqualis est motui ex iisdem composito AC ad eandem directionem reducto. Unde generatim constat, quod si plures motus inter se componantur, aut secundum allatum Corollarium resolvantur, summa eorum eadem permaneat, donec per vim externam in eos agentem turbetur.

Fig. 7. 12. Maxima hujus Corollarii utilitas in causa fuit, ut aliæ adhuc demonstrationes illius a diversis excogitarentur, quibus veritatis evidentia clarior evaderet. Nos exemplum unicum adferemus, idque planissimum, dum motus AB , AD inter se æquales sunt, & angulus BAD rectus. In hac hypothesi patet, $ABCD$ esse quadratum (*fig. 7, & 8*), & per diagonalem AC angulum BAD secari bifariam: & quoniam vires, seu motus AD , AB æquantur, nec ratio est, cur directio motus compositi magis versus hunc, quam versus alterum inclinetur, evidens est, eam fore in diagonali AC , quæ etiam quantitatem motus compositi metitur, uti jam ostendemus. Quod si enim negetur, AC esse
men-

mensuram, ponatur ea primo æqualis $A E$, minor quam $A C$: ducatur $B D$ secans rectam $A C$ in K , & accipiatur in $A C$ pars $A M$, quæ partem $A K$ excedat eadem ratione, qua $A C$ superat assumptam $A E$. Agatur per M ad $B D$ parallela $F G$, occurrentis rectis AD in G , & AB in F , & compleantur parallelogramma $AMGH$, & $AMFN$. Quoniam hæc parallelogramma non minus sunt quadrata, quam $ABCD$, & est $AD : AG = AK : AM$, hoc est $= AE : AC = AB : AF$, & per hypothesin AE est mensura vis compositæ ex AB & AD , sequitur, posse cogitari, vim AD esse compositam ex AM & AH , & AB ex AM & AN . Sed quia AH & AN æquales sunt, & directione opposita agunt, alteram altera elidet, & vires residuae $AM + AM (= 2 AM)$, quæ in eandem directionem diagonalis conspirant, simul sumptæ deberent æquari rectæ $A E$, quod est absurdum. Etenim $AM > AK$ ex constructione, & $2 AM > 2 AK$, seu AC , quæ per hypothesin est major, quam AE . Eodem modo ostenditur, vim compositam non esse metiendam per aliquam $AE > AC$ (fig. 8); quare necesse Fig. 8. est, ut ejus mensura sit ipsa AC accurate.

13. De motu, vel quiete corporum quotunque judicandi fundamentum nec certius, nec opportunius habemus, quam si ad eorum gravitatis centrum commune animum advertamus. In corpore regulari, & homogeneo centrum gravitatis idem est cum centro figuræ, & universe hoc centrum est illud punctum corporis, quod si sustentetur, totum cor-

pus

pus sustentatur. Si duo corpora sint æqualia, commune eorum gravitatis centrum est in rectæ utriusque corporis centra jungentis medio; si corpora inæqualia sint, vicinius est majori, & quidem ea ratione, qua ab hoc alterum exceditur magnitudine, sive distantiae centri gravitatis communis sunt reciproce ut corpora. Sit corpus $A > B$; ducatur (fig. 9) AB , & in ea ita accipiatur punctum C , ut sit $CA : CB = B : A$, ut fiat $B \times CB = A \times CA$, erit C centrum gravitatis corporis utriusque, atque deinceps ostendemus, quod si corpora A , & B juncta essent virga inflexili AB , & gravitatis expertise, ac punctum C sustentaretur fulcro aliquo, utrumque foret in æquilibrio. Si trium corporum centrum gravitatis commune queratur, inveniendum est prius duorum A & B centrum C , & tertium quoddam summæ utriusque A & B æquale, in C supponendum; tum queretur hujus tertii, ac alterius D centrum gravitatis G , quod idem erit cum centro trium datorum A , B , & D . Eadem methodo invenitur centrum commune gravitatis corporum quotunque.

14 Summa factorum, quæ oriuntur, si corpora ducantur singula in suas distantias ab eadem recta, vel plano positione dato, cuius comparatione corpora sunt ex eadem parte, æqualis est facto ex summa corporum in distantiam eorum centri gravitatis communis ab eadem recta vel plano; at si ex corporibus aliqua sint ex parte opposita lineæ, vel plani dati, facta ex his in suas distantias sumenda Fig. 10. sunt negativa, seu debent subtrahi. Sit recta positione

tione data **IL**, centrum gravitatis corporum **A** & **B** in **C**, **A a**, **Bb**, **Cc** ad **IL** normales in punctis **a**, **b**, **c**; si corpora **A** & **B** sint ad eandem partem rectæ **IL**, erit $A \times A a + B \times B b = \overline{A+B} \times C c$. Etenim ducta per **C** ad **IL** parallela **M N**, quæ occurrat rectis **Bb** & **Aa** in **N** & **M**, est $BN : AM = CB : AC = A : B$, hinc $A \times AM = B \times BN$. Est vero $A \times A a + B \times B b = A \times C c + A \times AM + B \times C c - B \times BN$; igitur $A \times A a + B \times B b = A \times C c + B \times C c = \overline{A+B} \times C c$.

Quando **B** est ex altera parte rectæ **IL** (fig. 11), & punctum **C** ex eadem parte cum corpore **A**, est $A \times A a - B \times B b = A \times C c + A \times AM - B \times BN + B \times C c = \overline{A+B} \times C c$ & si summa factorum e corporibus ex una parte rectæ **IL** in suas distantias æquatur summæ factorum e corporibus, quæ sunt ex altera illius rectæ parte, in suas ab eadem distantias, **Cc** evanescit, sive centrum commune gravitatis eorum incidit in ipsam rectam **IL**.

15. Ponamus jam corpora **A** & **B** moveri in rectis **AD** & **BE** (fig. 12), ac dum ad **D** & **E** pervenient, eorum commune centrum gravitatis esse in **G**. Sint **Ee**, **Gg**, **Dd** ad **IL** in punctis **e**, **g** & **d** perpendiculares, & **DM**, **GK**, **EN** ad **IL** parallelæ occurrant rectis **Aa**, **Cc**, **Bb** in punctis **M**, **K**, **N**. Per articulum postremum est $A \times Dd + B \times Ee = \overline{A+B} \times Gg$, quod si subtra-

Fig. 12.

trahatur ex $A \times A a + B \times B b = \overline{A + B} \times C c$ (quæ æquatio præcedentis articuli fuit), habetur
 $A \times A M + B \times BN = \overline{A + B} \times CK$.
Eadem methodo reperietur $A \times DM + B \times EN$
 $= \overline{A + B} \times GK$.

Si ponatur motus corporum A & B uniformis, rectæ AM & BN æquabiliter crescent, fientque tempore duplo duplæ; ideoque etiam CK æquabiliter augebitur, seu in ratione temporum. Et quia etiam DM, & EN eadem æquabilitate crescunt, consequens est, ut GK itidem æquabiliter crescat, adeoque fit CK ad KG in ratione constante $A \times A M + B \times BN$ ad $A \times DM + B \times EN$. Ex hoc autem patet, quod si corpora quotcunque motu æquabili in linea recta progrederiantur, eorum centrum commune gravitatis etiam in linea recta æquabiliter moveatur; & quod summa eorum motuum ad datam directionem reducta eadem omnino sit, ac si omnium corporum massa via centri gravitatis moveretur. Et quia porro summa motuum etiam in eorum collisione sine mutatione eadem perstat, actionibus mutuis æqualibus, & directionibus oppositis sumptis; sequitur, statum centri gravitatis communis iis actionibus, & collisionibus non affici, sed centrum istud in motu uniformi, vel quiete persistere eodem prorsus modo, quo corpus quodlibet in suo statu perseverat, donec ex eo per causam extrinsecam deturbetur. Propositiones istæ, mirum, quam theoriam motus illustrent; earum ope eadem fere facilitate de motibus integri alicujus systematis corporum

judi-

judicium ferre possumus, qua de unius alicujus motu decidimus.

16 Si corpora collocentur in spatio, quod ipsum æquabiliter moveatur, eorum actiones mutuae eadem sunt, ac si spatium quiesceret; & vires in corpora eadem, vel parallelis directionibus agentes, ac celeritatem æqualem iis imprimentes, nulla ratione eorum actiones mutuas, sive motus *respectivos* afficiunt. Sic motus omnes ab iis, qui in navi æquabiliter provehuntur, eodem modo peraguntur, ac si navis foret in quiete; si classis integra motu æquabili feratur, singularum navium motus relativi per oppositum currentium aquarum fluxum non mutantur, sed iidem manent, ac si mare quiesceret: motus telluris, & ejus atmosphæræ circa axem suum nullum effectum habet in actiones corporum, & virium in superficie agentium, nisi quatenus nec uniformis est, nec rectilineus. Et generatim actiones corporum in se mutuae non a motu eorum absoluto, sed a relativo dependent, qui, dum eandem habet directionem, est differentia motuum absolutorum; & si directiones corporum sunt contrariae, summa.

17. Quoniam hoc principium non modo universe ab omnibus admittitur, sed etiam experientiae communi maxime congruit, argumentum inde desumpsimus adversus novam virium theoriam, quæ pretium ab Academia Reg Scient. Parisina statutum A. 1724 reportavit: illud hic denuo tum ob evidentiam suam, tum ob simplicitatem, referre vi-

Fig. 13. sum est. Sint duo corpora A & B (fig. 13) æqualia, & interpositis laminis elasticis (aut alio quovis modo, quo idem præstetur) separata, moveanturque una cum plano E F G H directione B A uniformiter, secundum quam elateres agere possint velocitate ut 1. Fingamus dein, laxatas has laminas elasticas in corpora A & B æqualiter agere, iisque directionibus oppositis imprimere volocitatem ut 1. tum vero velocitas absoluta corporis A, (quæ prius erat ut 1) fiet = 2, & juxta doctrinam novam virium ejus vis evadet = 4; cum ex opposito velocitas & vis absoluta corporis B (quæ erat = 1) tantummodo destruatur; ut adeo per elaterum actionem corpori A accedat vis ut 3, & corpori B tantummodo dematur vis ut 1. At vero videtur certe, (& ipse Bernoullius id affirmate ait), actiones elaterum in corpora æqualia debere esse æquales; ut consequenter, si novam hanc doctrinam sequamur, actionum æqualium effectus fint admodum inæquales; altero nempe triplo alterius futuro: nec scio sane, an quidpiam magis absurdum seu in Philosophia, seu in Mechanica constitui possit. Generatim si velocitas plani E F G H in directione AB sit m , velocitas per elateres corpori A addita, & corpori B dempta n , erunt velocitates absolutæ corporum A & B ut $m + n$, & $m - n$, & vis, quæ accessit corpori A actione elaterum, erit $2mn + nn$, quæ vero corpori B detracta est, $2mn - nn$, quarum differentia est $2nn$.

Insuper admittitur, quod actiones mutuæ corporum in spatio motu æquabili lato positorum,
eædem

eædem sint, ac si spatium illud quiesceret; atqui si spatium **E F G H** quiesceret, negari nequit, vires communicatas corporibus **A** & **B** per actionem laminarum elasticarum fore æquales, quæ secundum hanc novam doctrinam exhibenda esset per $n n$; cum interim spatio **E F G H** æquabiliter progrediente vis communicata corpori **A** sit ut $2 mn + nn$, & destrœta in corpore **B** ut $2 mn - nn$. Hæc sane evidencia sunt, ac simplici ratiocinio deducuntur, atque rei, de qua agimus, maxime opportuna. Qui adversam partem tuerintur, eisdem ejusmodi definitionem virium producere possunt, ut lis non nisi de nomine agitari videatur; verum cum inter *actiones* & *vires* nexus arctissimus intercedat, nil aliud profecto spectant, quam ut notionibus, quas de iis habemus, atque vocibus, quibus easdem exprimimus, tenebras offundant, dum per *actiones* æquales vires inæquales eodem tempore effici ajunt. Ex quo illud quoque manifestum redditur, ab hujus opinionis affectis nequaquam rite intellectum esse, quod docent; illud, inquam, quod dicunt, quantitatem virium absolutarum per corporum conflictum non esse mutabilem, atque id tam evidenter ex *actionis* & *reactionis* æqualitate consequi, ut, qui id demonstrandum fusciperet, non aliud ageret, quam ut ex re manifesta obscuram faceret. Hinc enim eluet, eos intelligere, ob æqualem *actionem reactioni*, in viribus corporum æquales fieri mutationes; at demonstravimus, etiam ex hac nova doctrina deduci, mutationes istas in viribus corporum effectas admodum inæquales esse, quamvis *actio* & *reactio*, quibus generantur, sint æquales. Ut adeo

videatur Leibnitzius errore in hanc opinionem lapsus, ejusque defendendæ necessitatem fibi A. 1686 primum imposuisse, quam ex ejus discipulis non nulli temere amplexi sint, quin examini subjicerent, quæ a vero tam abhorrentia inde dimant.

18. Si motuum theoria, ut oportet, intelligatur, leges, quæ ad comparationem, compositionem, & resolutionem motuum adhibentur, etiam pressioni applicantur, hoc est, viribus motum generantibus, vel ad motum sollicitantibus: vires enim nihil sunt aliud, quam summa pressionum omnium, quæ in corpus fiunt, cumulatim sumptarum ex actionibus continuis causarum tempore finito agentium, & pressiones sumuntur instar virium infinite parvarum, sive elementorum, quibus vires constant. Hæc eadem theoria inde quoque novam lucem, & evidenter acquirit, quod leges eadem tam in pressione, quam in motu obseruentur. Cum vis quæpiam in corpore ex concurso plurium virium, & impulsuum efficitur, si ad certam aliquam directionem refertur, æquari debet summæ omnium earum, quæ secundum hanc directionem impenduntur in ejus effectione; & si vis talis habeatur ex actionibus continuo sibi succedentibus, motus ex ea genitus debet æqualis esse summæ pressionum ad ejus generationem concurrentium. Similiter si motus per resistentiam vis contrariæ destruitur, æquari debet summæ omnium actionum, per quas ex integro destruitur. Item intensitas vis motum in corpore generantis, æqua proportione est cum augmento virium, quod tempore dato addit; & intensitas resistentis, seu motum

tum destruentis, metienda est per decrementum vi-
rium, quas tempore dato elidit. Nam illic incre-
mentum virium, & decrementum isthic sunt effectus
pleni causæ, quæ per hypothesin singulis momentis
actionem repetit, & tota energia influit. Universæ
intensitas vis motum generantis, vel extinguentis eo
major est, quo major est mutatio velocitatis secun-
dum directionem, qua ea agit, & quo minus est
tempus, quo hæc mutatio efficitur, si durante eo
tempore, intensitas vis effectricis constans maneat;
at si sit mutabilis, ejus intensitatem pro temporis mo-
mento dato metitur mutatio velocitatis, quæ ma-
nente vi eadem intra tempus quodpiam datum effi-
ceretur.

19. Pressio, sive vis effectrix motus in cor-
pore, est in ratione composita quantitatis materiæ
in corpore contentæ, & velocitatis, quam eidem
corpori communicaret tempore dato, si interea uni-
formiter ageret; atque hæc pressiones in duo corpo-
ra semper sunt æquales, si eorum massæ sint reci-
proce ut celeritates, hoc est, si intensitas vis agentis
in corpus majus A, sit minor intensitate vis agen-
tis in corpus minus B in eadem ratione, qua B
minus est, quam A. Quod si itaque duæ ejusmo-
di vires agant in duo corpora directionibus opposi-
tis, aut ea attrahant, in corporum contactu neu-
tra potior erit, nec motus ullus consequi potest.
Simili modo, si duo corpora celeritatibus, quæ e ra-
tione massarum reciproca definiuntur, directione op-
posita sibi occurrant, ac sint mollia, eorum motus fese mu-
tuo elidunt, aut si sint ita perfecte dura, ut eorum par-

tes

tes nullo modo sint flexiles, post iactum ambo quiescent; at si elasticitate sint praedita, æqualibus motibus alterum resiliet ab altero. Unde elucet accuratus consensus inter leges pressionum, aut virium agentium, & leges motuum, seu virium genitarum ab illis, quemadmodum universe necesse est, ut inter vires effectrices, & effectus praestitos analogia detur. At vero si recentem de viribus corporum doctrinam sequamur, ea penitus tollitur. Etenim secundum hanc opinionem, dum velocitas finita est, utcunque sit exigua, vim metitur quadratum velocitatis. Dum autem velocitas est infinite parva (ex mente patronorum hujus sententiae), utpote ex primo impulsu causæ motum efficientis genita, vis est in ratione simplice velocitatis. Et sane non possumus hic loci omittere, quin moneamus, tam manifestum legis ejusdem discrimen videri haud posse conciliari cum principio *continuitatis*, quod hisce Philosophis alias tantopere cordi est, tantoque ab iis ardore propugnatur. Ex ejusdem opinionis principiis sequitur, quod vires sese æquilibrantes, & directionibus oppositis effectus suos mutuo elidentes, possint in quavis ratione inæqualitatis esse; & dum corpora viribus æqualibus, ac directionibus contrariis sibi occurront, non tamen alterum alterius effectum destruat, sed ab illo, quod majore velocitate praeditum est, alterum vincatur. Exhibeat enim V velocitatem corporis A , u velocitatem corporis B , erit $A \times V$ motus, seu vis corporis A , & $B \times u$ vis corporis B , ut sit $A \times V = B \times u$, si vires sint æquales, seu si $V: u = B: A$; quibus positis constans experientia nos docet, motus hosce æquilibrari, si

di-

directiones sint oppositæ. At juxta novam doctrinam vis corporis A est ut $A \times VV$, & mensura vis corporis B est $B \times uu$, estque illa ad hanc, ut V ad u , cum per hypothesin sit $A \times V = B \times u$. Igitur hæ vires secundum hanc doctrinam tantum absunt ab æqualitate, ut vis corporis A possit esse tanto minor vi corporis B, quanto V minus est quam u , seu quanto B minus est quam A; atque hinc vis possit æquare, imo superare alteram millies, vel in quavis ratione data, majorem. Idem principiis novæ doctrinæ spectatis, vires corporum A & B æquantur, quando $A \times VV = B \times uu$, seu, ut exemplo utamur, si A sit quadruplum corporis B, & velocitas corporis B dupla velocitatis corporis A, qua in hypothesi quantitas motus, seu momentum corporis A est duplum momenti corporis B, & teste experientia motus corporis A major est, quam qui tantummodo possit motui corporis B resistere. Verum sententiae hujus defensores nihil relinquunt intentatum, ut experientiam cum theoria sua concilient; & si quis eum sibi assumeret velit laborem; ut eorum rationes ad examen revocet, facile advertet, quam parum sint solidæ, quamque nihil admodum emolumenti spondeant.

20. Ponantur corpora A & B (fig. 14), dum adversis directionibus concurrunt, interpositos elateres æquales, & similes comprimere, donec horum reactione utriusque motus extinguatur. Fatetur diserte Bernouillius, actiones elaterum in utrumque corpus esse perpetuo inter se æquales; interim tamen asseverat, per eas tanto majorem vim in cor-

Fig. 14.

Y

pore

pore B elidi, quam in corpore A, quo corpus A majus est
corpore B, sive (si C sit centrum gravitatis corporum A
& B) quo BC majus est, quam CA. Quare ad-
mittit utique, per pressiones, seu actiones æquales
elaterum gigni eodem tempore vires, quæ sint in
quavis ratione inæqualitatis, quam quis velit, quod
manifeste pugnat cum evidentissimis notionibus, quas
de actionibus, & viribus nobis effingere possumus,
neque aliud adfert commodi, quam ut in theoriam
motus obscuritas, & loquendi formulæ mysteriis ple-
næ introducantur. Si ponamus, a corpore A elate-
res usque ad C comprimi, necesse est, ut a corpo-
re B elateres a B usque ad C eodem tempore, eo-
demque gradu constringantur: atque ex hoc infert
Bernouillius, vim corporis A esse ad vim corporis
B, ut est numerus laminarum elasticarum inter A
& C ad numerum earundem inter B & C. At
enim quoniam motus, vis, aut effectus, cuius de-
mum cunque generis fit, qui in corporibus A & B
editur, vel extinguitur, dependet ab actione, qua,
nullo interveniente alio, præstatur, & quidem depen-
det unice; & quoniam in hoc concursu actiones elate-
rum sunt illæ, quæ in corporibus A & B motum
destruunt; quoniam denique, ipso fatente Bernouillio,
actiones elaterum in hæc corpora æquales sunt, an
non evidens fit, vires in corporicu actione elate-
rum sublatas esse æquales? an non evidens porro
fit, virium earundem in corporibus elatarum mensu-
ram esse vires impensas ab elateribus in ea corpora
agentibus, dum effectus hos edunt, non autem nu-
meros elaterum? Etenim sola extima lamina corpori
contigua in illud agit, reliquæ solummodo illam ful-
ciunt:

ciunt : ut adeo tota mutatio , quocunque nomine appelletur, quæ in corpore efficitur , per actionem hujus unius habeatur, cuius tantum, si recte ratiocinemur, in calculo ratio habenda est. Quodsi Bernouillius vim hujus per numerum elaterum similium , & æqualium , dato gradu compressorum , & sese rursus expandentium , definivisset, habuissimus sane , quæ peregrinis ejusmodi, ac obscuris loquendi modulis opponeremus, ut qui nil aliud spectant , quam ut motus theoria , quæ antea tam manifesta , ac clara erat , perturbetur. At vero hoc si factum fuisset a Bernouillio , intelligeretur illico , litem hanc spectare præcipue voces quasdam artibus usitatas , nec errores ex hac doctrina enati tam perniciosi fuissent. Hinc est , quod hunc in modum vires non definiat.

21. Dum corpus gravitate sua descendit , ejus motus considerari potest tanquam summa impulsuum æqualium , & continuorum , qui omnes a corpore tempore lapsus recipiuntur. Dum vero corpus perpendiculariter sursum projicitur , ejus motus spectari potest tanquam summa impulsionum ejusdem vis , donec totum ejus motum extinguant , agentium. Et dum celeritas corporis projecti dupla est , eæ impulsiones gravitatis duplo egent tempore , ut motum corporis destruant. Ex quo sequitur , corpus dupla celeritate sursum impulsum , ac duplo tempore motum conservans , debere ad quadruplam altitudinem ascendere , antequam ejus motus omnino expiret. Hinc porro infertur , corpus dupla velocitate præditum moveri vi dupla , quoniam ab eadem potentia intra tempus duplum tollitur , non autem vi qua-

drupla, quamvis altitudo, ad quam pertingit corpus, sit quadrupla. Interim tamen Leibnitzius in hoc uno argumento doctrinæ suæ vim omnem constituit, & ea, quæ deinceps ex cavitatibus impressis corporibus mollibus per lapsum aliorum, desumpta sunt, ejusdem prorsus sunt generis & ponderis. Mensura causarum agentium non sunt promiscuae omnes effectus praestiti, nulla conditionum concurrentium ratione habita. Et si ante oculos habeamus Mechanics, & Geometriæ principia, motum, viresque non metiuntur ulli effectus, nisi tempus, & directio in computum veniant. In Geometricis omnia ex collatis inter se partibus, & elementis, ex quibus quæque quantitas generatur, deducimus; & in Mechanicis non alia est tutior methodus, quicquam de motu & viribus statuendi, nisi e ratione virium effectricium. Certe motus & vis corporis longe arctiorem nexum habet, magisque evidenter, cum causa effectrice, quam cum spatio, quod seu in argilla molli, seu quovis alio in medio conficit.

22. Non facilior est in errorem lapsus, quam si principio, quo mensura causæ suæ effectus constituitur, seu in rebus Metaphysicis, seu in Phisicis sine cautela, & accurata conditionum omnium discussione utamur. Qui novæ opinioni de viribus adhaerent, aut certe horum nonnulli, vim ita definiunt, ut eam dicant esse agendi potentiam in corpore, cuius mensura est effectus integer, qui præstatur, donec motus deficiat. Eadem definitio adhibetur a Philosophis quibusdam, qui præsentem quæstionem volunt tantummodo de vocibus moveri. Præterea iidem

no-

nobis dicunt, vim esse pariter æqualem numero elaterum, quos tendere potest, antequam destruatur, idque citra rationem aliam, definitionis vel axiomatis instar. Quod si posteriore hac in opinione sisterent, facile daremus, exigui momenti litem esse, idque unum ex hac libertate enasci incommodi, quod, ut observavimus jam, notiones motus, & actionis temere permisceantur. At enim cum etiam velint, vim, ex eorum arbitrio definitam, esse causam effectuum motu editorum, veramque ejus mensuram ab hisce desumendam esse, res haud quaquam solas voces spectare potest. Nam Newtoni lex altera motus ostendit, quod si vis impressa consideretur velut causa, ejus mensura petenda sit a mutatione motus, quam efficit, & non a spatio, quod adversus gravitatis actionem percurritur, nec ab excavatis forveis a corporibus in argillam mollem cadentibus. Atque hæc lex certissima dux est, quam sequi possumus, sive effectus e causis, sive causas ex effectibus metiri velimus.

23. Consensio inter leges pressionum, sive potentiarum motum efficientium, luculentior adhuc fit, si earum compositio, & resolutio attendatur. Si potentiae agant directionibus A B & A D (fig. 4) atque in earum simul sint ratione, componuntur in potentiam juxta diagonalem A C agentem, quæ etiam ejus mensura est. Et quia $A C < AB + AD$, potentia composita ex A B & A D minor semper est potentiarum, ex quibus componitur, id, quod facile demonstratur, si potentia A B in A M & A N (fig. 5) resolvatur, & A D in A K & A L, ex quibus A N & A L sunt æquales, & Fig. 5.

oppositæ, mutuoque suos effectus elidunt, ut solum remaneant $A M + A K$ seu $A C$ tanquam mensura potentiae compositæ. Recentis de viribus sententiæ patroni, quod ad potentias, & pressiones, nobiscum sentiunt; verum si agatur de viribus, longe alia ratione calculos subducunt. Quippe ex eorum mente, dum angulus $B A D$ rectus est, vis composita æqualis est viribus componentibus $A B$ & $A D$, nec quicquam virium per compositionem deperditur, licet vires $A L$ & $A N$ directiones habeant oppositas, nec facile sit discrimen reperire, cur hoc locum habeat in compositione potentiarum sive pressionum, non item in compositione virium. Dum angulus $B A D$ (fig. 15) acutus est, quadratum diagonalis $A C$ majus est summa quadratorum $A C$ & $D C$ (Eucl. 12. 2) seu $A D$ & $A B$; quare juxta novam doctrinam duæ vires directionibus $A D$ & $A B$ agentes debent componere vim earum summa majorem, id, quod directe opponitur principio Metaphysico, cui tantum tribuunt, quod effectus ad mensuram causæ effectricis exigendus fit, cum is causam supereret, quod non minus in Metaphysicis absurdum est, quam si in Geometria penerrentur duæ quantitates junctim sumptæ efficere majorem, quam sit earum summa. Hoc cum illis opponeretur, ejusmodi dederunt responsum, quod vel ideo hic loci referri meretur, ut exemplo fit, qua ratione occurrentes difficultates resolvere consueverint. (vid. Desaguliers cours de Philosophie experimentale vol. 2 ad Notam, quæ est circa finem pag. 72 edit. Anglicanæ): *ex nova opinione nihil absurdum deduci; sed ex ea, dum vires non per mo-*

men-

Fig. 15.

menta, sed per quadrata velocitatum metitur, inferri, dum angulus DAB acutus est, quadratum AC (seu vim compositam) esse majus quadratis AD & AB, quorum summa sunt vires componentes.

24. Ut rei huic plus lucis accedat, fingamus, corpori elasticō A (fig. 16) imprimi vim a corpore elasticō H æquali secundum directionem AB, & simul vim secundum directionem AD a corpore itidem æquali G. Ex sententia eorum, qui novam opinionem tinentur, vires corporum H & G communicant corpori A per gradus infinite parvos, & continua pressione, estque vis tota corpori A communicata, summa omnium effectuum pressionis. Nihilominus vis infinite parva, quæ quovis momento corpori A imprimitur, minor est, quam summa pressionum eodem momento corporum H & G, ea quidem ratione, qua AC minor est, quam AB + AD, ut illis nobiscum convenit. Igitur summa omnium pressionum, seu vis tota, communicata corpori A, minor esse debet, quam summa pressionum absolutarum, provenientium nempe a corporibus H & G, in eadem scilicet ratione, in qua est AC ad AB + AD, hoc est, vires corporum A, H & G debent esse ut rectæ AC, AB & AD, non vero ut earum quadrata. Neque animo concipi potest, quomodo, dum vis corporis A habetur per collectionem pressionum, seu virium infinite parvarum, quas singulis momentis per actiones corporum H & G recipit, quæque singulæ minores sunt, quam summa actionis utriusque corporum H & G eas efficientis, vis tamen tota corporis A excedat sum-

Fig. 16.

summam omnium actionum, seu virium corporum H & G.
Loquor vero hic de viribus infinite parvis, ut, quantum licet, me accommodem adversæ sententiæ Patro-
nis usitato loquendi modo. Ad hæc vero (vid. lau-
datum Desagul. nota ult.) nil aliud reponunt, nisi a
nobis illud vocari vires, quod ipsis *momentum* dici-
tur. Verum per hoc non explicant, quomodo vi-
res infinite parvæ, quæ corpori A in directione A
C communicantur, constituant vim finitam, earum
summa multo scilicet majorem; seu quomodo fiat,
ut effectus tam longe recedat ab æqualitate cum sua
causa, quod Metaphysices principium jam adop-
tare, jam rejicere videntur, ut e re sua judicant.
Si ponatur angulus B A D infinite parvus, eadem
vires juxta recentem opinionem generant in A vim,
quæ earum summam excedat ea ratione, qua quadra-
tum de AB + AD excedit summam quadratorum
de AB & AD, ut si sit $AB = AD$, vis in A ge-
nita sit dupla futura virium summae; est enim in
hac hypothesi quadratum de AB + AD æquale
quadrato de $2 AB = 4 AB^2$, & vires effectri-
ces simul sumptæ sunt tantum $2 AB^2$, ut ex pro-
prio eorum calculo deducitur. Unde in præsente
corporum conflictu causa præstat effectum ejusdem
speciei seipsa duplo majorem. Responsum est (vid.
Desagul. locum superius allatum pag. 74 in notis)
posse a *momento* duplo haberi effectum quadruplum,
si celeritas dupla est. At vero qui ita respondit,
argumenti vim non satis perspexisse videtur: osten-
dimus enim, quod si eorum calculos sequamur, non
momentum, sed vis dupla debeat in præsente hy-
pothesi effectum quadruplum edere, servata defini-
tio-

tione vis, quam ipsi statuunt. Et si quidem rem dicamus, eo recidunt responsiones, quas ad absurdum ex eorum adeo adamata opinione deducta dederunt, quod nihil sit absurdum, quidquid ex ea opinione inferri possit, eo ipso scilicet, quod inde inferatur.

25. Potentiarum, seu pressionum resolutio non potest non ex earum compositione derivari. Quemadmodum pars quædam motus perit in compositione, ita consequens est, ut aliquid accedit per resolutionem; & quemadmodum hoc in motus & potentias effectrices convenit, ita nihil obstare potest, quo minus idem concedatur effectibus harum potentiarum, & viribus corporum; eademque sunt rationes, quæ id evincant de posterioribus, ac illæ, quibus in prioribus hoc statuitur. Feriat corpus C (fig. 17) in diagonali parallelogrammi CLDK motum, alterum corpus A æquale oblique, ita, ut illud directione CA, rectæ CK in directum jacente, propellat, & simul corpus alterum æquale B directione CB, productæ scilicet CL congruente: progradientur corpus A recta CA, & B recta CB; corpus vero C, postquam illis totam suam vim communicavit, quiescat. Non poterit mirum videri, a viribus, & motibus corporum A & B excedi vim & motum corporis C, si attendatur, quod corpori A a corpore C communicetur tota vis CK, & corpori B tota vis CL, cum resistentia, seu inertia corporis A non agat in corpus C directione ejus motui omnino opposita, sed solum obliqua CK, ideoque motus corporis C non tantopere hac reactione imminuitur, ac si foret oppositio directa: nulla enim

potentia, nulla resistentia effectum tam magnum præstare potest in directione quavis alia, ac in illa, secundum quam ipsa agit: eodem modo reactione corporis B extinguitur motus, seu vis **L C** in corpore C juxta directionem eam, qua agit; verum hic motus tantus non est, si ad directionem **CD** referatur, ad quam illa reactio obliqua est. Unde necesse est, motum corporis C in directione **CD** esse minorem summa motuum corporum A & B in suis directionibus consideratorum. Quod si contendas, in hoc eventu motum corporis C in directione **CD** esse causam motuum corporum A & B in suis directionibus **CB** & **CA**, adeoque effectum esse majorem sua causa, cum summa **AC** & **BC** major sit, quam **CD**; reponimus, nos jam annotasse, quod quemadmodum id utrinque convenit, si agatur de professionibus vel potentiis, ita nihil obstatre possit, quo minus idem admittatur in motus & vires, cum ex iisdem dependeat capitibus. Præterea animadverendum est, per vim inertiae corporis fieri, ut non modo resistat omni mutationi motus, verum etiam omni mutationi directionis motus; hinc dum actio non est directa, ratio haberi debeat utriusque hujus resistentiae. Ponatur primum a corpore C feriri corpus A; habebit reactio corporis A duplē effectum, nempe quod partem motus in corpore C extinguat, & quod simul efficiat mutationem in eius directione; nec haec reactio, quæ æquatur motui, sive vi acquisitæ, estimari poterit per alterutrum tantum effectum, sed per utrumque simul acceptum. Dein peracto impactu in A, corpus C directione **CB**, & vi **CL** progrederetur; sed quoniam directe

in

incurrit in corpus B, ei totam suam vim communicat, utpote cum corpus B directe resistat. Sumpsimus hic, corpora C, A & B perfecte esse elastica, ut nos adversariis nostris accommodaremus, quorum non nulli ad hæc sola suam doctrinam restringunt.

26. Si corporibus A & B substituantur elateres, quorum resistentia exponatur rectis CK, CL, eodem modo ostendetur, hanc resistentiam non habere mensuram vim corporis C, sed utramque simul sumptam debere esse majorem vi illa. Etenim ratio, qua elater A agit ad extinguendum motum corporis C, est cum dispendio vis suæ conjuncta: agit enim juxta directionem CK; nec ejus vis tanta est, si ad directionem obliquam CD reducatur. Quod si elater A eodem applicationis compendio ageret, quo B, simul objicerent majorem resistentiam, quam in situ figuræ efficere possint, unde effectus eorum junctim accepti, quos præstare possunt, superant vim corporis C. Hinc vero liquet, hoc argumento nostram sententiam adeo non everti, ut etiam confirmetur, atque eos, qui adversus nos illo usi sunt, falso existimasse, has vires æquales esse, quæ ex notis Mechanicæ principiis admodum inæquales sunt. Quod si quis querat, quid igitur fiat excessu illo vis elateris A supra partem vis corporis C, quam elidit? huic responderi potest, eum excessum nequam carere effectu suo; etenim directio corporis C ex DC mutatur in CB, neque ulla est ratio five in principiis Metaphysicis, five in Mechanicis fundata, quæ doceat, hunc effectum negligenter.

dum esse, dum effectus cum causa sua comparantur. Ex opposito plura afferri possunt exempla, in quibus vis tantummodo in mutationem directionis motus corporis impenditur, nulla motus ipsius acceleratione, vel retardatione. Vis, quæ sufficit ad corpus elevandum perpendiculariter ad horizontem usque ad distantiam duplam a centro telluris, æqualis est illi, quæ, si corpori directione horizontali imprimetur, efficeret, ut, semota resistentia aeris, corpus perpetuo in circulum circa tellurem moveretur, quemadmodum ex theoria gravitatis constat; & tamen illa vis prior non nisi tempore haud longo resistentiam ex gravitate oriundam superaret; altera vero eadem resistentiam perpetuo vinceret sine motus diminutione. Primum si fieret, actio gravitatis directe foret opposita vi corporis; si alterum, actio hæc foret perpendicularis ad directionem motus corporis: illic tota impenderetur ad extinctionem motus; hic tantummodo ad mutationem directionis. Argumenta pro nova virium doctrina ex resolutione motus petita, primo intuitu magnam veri speciem habere videntur, omnibusque aliis, quæ hanc in rem excogitata sunt, plus roboris. At si allatæ a nobis animadversiones a lectore nullo partium studio occupato expendantur, facile is intelliget, per ea communem sententiam non tam everti, quam stabiliri. Et quemadmodum in aliis eventibus, quos Leibnitzii assclæ adferunt pro sua de viribus opinione, temporis rationem negligunt, ita isthic, dum effectus cum motu, & viribus conserunt, ad directionem, ut oportebat, non attendunt, quamvis ea in Mechanica non minoris sit momenti, quam motus, & vires ipsæ.

27. Pluribus hæc tractavimus, quoniam multum inde lucis theoriæ motus accedit. Sæpe evenit, ut ob controversias forte enatas propositiones elementares non sine emolumento accuratori examini subjiciantur, ac ubi legitimæ deprehensæ sunt, magis reddantur perspicuæ, & per ipsas disceptationes plenius intelligantur. Priusquam tamen hinc abeamus, experimentum quoddam a viro ingeniosissimo, ac solertissimo (cui tantum debent scientiæ Mechanicæ) D. Grahamo institutum recensere debemus. Paravit hic pendulum cavitate instructum, qua, cum ad infimum vibrationis punctum veniret, reciperet alterum corpus æqualis ponderis: hoc vero recepto animadvertisit, velocitatem penduli massa dupla prædicti fuisse accurate dimidiam prioris, antequam alterum corpus adjungeretur. E quo liquet, per vim eandem in massa dupla dimidium tantum celeritatis effici, quod communem de corporum viribus sententiam confirmat, cum recente vero opinione pugnat. Complures adversus novam hanc doctrinam erudite scripsierunt, ad quos lectorem præsentem materiam uberiori pertractatam videre cupientem remittimus (vid. quæ in Monum. Acad. Parif. ab illustri Mairano habentur ad An. 1728, ac plures Dissertationes D. Jurin in Transact. Philos. &c.). Volunt equidem ejus defensores, hac adoptata problematum resolutionem multo faciliorē redi, quæ, si antiquior tenetur sententia, plurimum sint intricata. Verum rejecta corporum perfecta duritate, & flexionis impotentia, plus damni, quam lucri enatum est, ut alias ostendimus, ac in sequentibus patebit, ubi accuratius effectus corporum ex impactu definiemus.

28. Quoniam reactio semper æqualis est actio-
ni, mutuae corporum actiones nullum possunt motum
in communi centro gravitatis systematis, ad quod
pertinent, efficere. Si foret in corporum quopiam
systemate actio, cui non responderet reactio æqua-
lis, & contraria, per eam status centri communis
gravitatis totius systematis mutaretur, & ejus motus
turbaretur; & ex opposito si recipiatur statum cen-
tri communis gravitatis systematis non mutari per
actiones corporum in eo contentorum, infertur, eo-
rum actiones esse mutuas, æquales, ac fieri directio-
nibus contrariis. Hinc concludemus, legem tertiam
motus universæ intellectam esse rerum præsenti statui,
ac experientiæ congruam, ac pertinere ad omnis ge-
neris potentias, quæ in natura locum habent; æque
ad *attractionem*, & *repulsionem*, ac ad alias vires,
neque esse id hypothesin quandam a Newtono arbit-
trarie assumptam: videmus enim hasce vires non mi-
nus pendere a corporibus *atrabentibus*, vel *reppel-
lentibus*, quam ab *attractis vel repulsis*. Magnes ea-
dem vi attrahit ferrum, qua a ferro attrahitur; & ob
æqualem hanc attractionem, ambo, cum ad conta-
ctum perventum est, quiescunt. Si terræ portio,
velut mons aliquis, premeret in terram, & terra
non eadem vi reageret in montem, hic necessario
terræ resistentiam vinceret sua pressione, & terram
motu accelerato in infinitum moveret. Idem de la-
pide, de quavis terræ particula eodem jure dicen-
dum est, ac de monte maximo. Corpora densa in
ratione densitatis suæ (si cetera nihil conditionem
mutent) agunt in lucem, eam refringentia, dum in-
cidit; & vicissim lux agit in corpora, ea calefaciens,

ac particulas agitans. Aequalitas actionis, & reactionis ita generatim locum habet, ut quandocunque motus novus per potentiam quandam, aut quodvis agens in natura editur, semper ejus reactione vel æqualis motus, & oppositus efficiatur, vel directione eadem æqualis motus destruatur: si ope machinæ cujusdam corpus aliquod jaciatur in altum, ipsa machina æquali vi in terram, & aerem agit. Hæc lex si abesset, status centri gravitatis terræ omni actione, vel impulsione cujusvis potentiae in hunc globum agentis turbaretur; & ob hanc legem fit, ut status centri gravitatis telluris, rerumque ordo conservetur, nil officientibus motibus, qui seu prope terræ superficiem, seu in ipsa superficie, seu in terræ visceribus oriuntur. Eadem lex facit, ut status systematum peculiarium quorumvis Planetarum, & quies systematis universi perseveret, quin actionibus quarumcunque virium mutatio induci possit. Unde consequitur, etiam in potentiis attractivis, & repulsivis, cujuscunque naturæ sint, & quascunque causas habeant, quæ in natura dantur, actionem & reactionem semper æquales esse. Et quoniam lex hæc in omnis generis motibus ab impulsu provenientibus observatur, mirum profecto foret, si e Philosophis actiones potentiarum per impulsiones explicantibus datur quispam, qui eam in dubium revocare velle. Observant quoque hanc legem agentia libera, & intelligentia: licet enim principium motus in his supra Mechanismum sit; attamen instrumenta, quibus in suis actionibus uti debent, ita illi subsunt, ut non nisi ex ejus præscripto executio habeatur. Dum quis lapidem in altum projicit, simul æqualem vim in

in terram exerit; hinc centrum gravitatis terræ & lapidis nihil penitus mutationis subit. Et merebatur fane legis hujus dignitas, quæ tam necessaria est, ut rebus ordo, & cursus constet æquabilis, ut ejus meminissent, qui de causis finalibus alias tam eleganter, & utiliter scriperunt.

C A P U T III.

De Potentiis Mechanicis.

I. **N**ter ea, quæ cultiores populos e Barbarorum numero eximunt, merito etiam Mechanics cognitio censetur. Ab hac artis opera pretium suum, & elegantium mutuantur; atque ejus ope destitutis arctissimi essent in naturalium rerum scientia limites positi. Huic debemus ingentia illa commoda, quæ a viribus in natura agentibus in nos derivantur; hæc nos docet elementorum motus, aeris puta, aquæ, ignis, in varios vitæ usus cum emolumento convertere, modo industria nostra debitam materiam, ac instrumenta suppeditet. Quam exiguae sunt vires humanæ, quando Mechanics carent subfido? & tamen, ubi hæc suppetias venit, nihil ferre est, quod non possint perficere. Est hæc scientia evidentiæ e rigidissimis demonstrationibus erutæ capax, ac propterea permagni momenti censendum est,

est, ut e veris suis principiis deducatur, omnique cura excolatur. Newtonus Mechanicam in *practicam*, & *rationalem* partitur, quarum prior de potentiis Mechanicis agit, de *vecle* nempe, *axe in peritrochio*, *trochlea*, *cuneo*, *cochlea*, *plano inclinato*, diversaque horum combinatione ac conjunctione: altera, *theoretica*, inquam, univerfas complectitur motus rationes, ac quinam motus a datis potentiis effici debeant, docet; vel datis motibus, ut potentiae, vel vires effectrices inveniantur: ut adeo tota Philosophia naturalis in eo versari videatur, ut phænomenis in natura sese offerentibus Mechanicæ rationalis leges rite applicet. Et siquidem a phænomenis ad potentias progrediamur, methodo analyticâ utimur; at si phænomena ex ipsis potentiis deducamus, synthesin adhibemus. Verum seu hac, seu illa procedamus via, ut progressus votis respondeat, necesse est, ut summa prius evidenter principia Mechanics flabiliamus, tanquam totius operis fundamenta. Et quidem inertiam, seu naturam status sui tenacem corporum jam discussimus, qua nempe fit, ut non modo in motu, vel quiete persistant, sed etiam motus novos viribus impressis congruos recipient, atque in ratione resistentiae, quam superare debent, reagent: unde ex tribus legibus generalibus motus, earumque corollariis, Capite superiore demonstratis, Mechanics principia deducenda nobis sunt. Eo autem ipso ex capite, quod leges dictæ cum his corollariis hic quoque locum habeant, quamvis causa motus ipsa, natura vis impressæ, aut resistentia in se nobis vel incognita sint, vel certe admodum obscura videantur; hæc naturæ caligo, & potentiae effectricis

motus, impedire nequit, quo minus ejus effectus sufficiente claritate in Mechanica detegamus, modo ejus actionem certæ mensuræ subjecere sciamus. Et certe quis ignoret, ab iis, qui nunquam in causam gravitatis inquisiverunt, præstantissimas repertas esse machinas, & elevandis ponderibus, eorumque superandæ resistentiæ commodissimas.

2. Dum vero de machinis agitur, hæc in considerationem veniunt, *pondus*, quod elevandum est; *potentia* ponderi attollendo destinata; & *instrumentum*, sive machina eum in finem adhibenda. Præterea duo sunt præcipua problemata, quæ de quavis machina resolvi debent: alterum, invenire rationem potentiae ad pondus, ut sese mutuo sustentent, sive ut habeatur æquilibrium; alterum, reperire rationem, quæ inter pondus, & potentiam intercedere debet, ut tempore dato a potentia effectus omnium, qui potest, maximus præstetur. Omnes, qui de Mechanica scripserunt, de priore problemate agunt; at qui de secundo tractent, pauci omnino sunt, quamvis ex eo non minus commodi existat, quam e priore in usum redundet. Et quod ad primum problema, omne virium genus e communi quadam, certaque metiendum est regula ex ipsis legibus motus eruta, quæ theoriae motus, cuius cum naturæ simplicitate consensum superiore Capite exposuimus, non parum elegantiæ, & roboris tribuit. Ponatur enim machina quævis in motu constituta; reducatur celeritas tum potentiae, tum ponderis ad eam directionem, juxta quam utraque agit: innescet ratio utriusvis celeritatis; & si quidem fuerit potentia ad

pon-

pondus, ut velocitas ponderis ad velocitatem potentiae, aut, quod idem est, si factum ex potentia in suam celeritatem æquetur facto ex pondere ducto in suam quoque velocitatem, inter potentiam, & pondus æquilibrium erit, nec altera alteram vincet, si machina fuerit in quiete; at si hæc in motu fuerit, hic æquabiliter perdurabit, nisi forte per affrictum, aliasve causas destruatur. Est hoc principium exactissime analogum illi, in quo (Cap. 2 §. 19) æquilitatem motuum, ac virium corporum universe constituimus. Etenim quemadmodum motus binorum corporum tunc æquales sunt, ac alter alterum elidit, si fiant directionibus oppositis, quando prius est ad secundum, ut secundi velocitas ad velocitatem primi, compensante scilicet massæ defectum excessu velocitatis in corpore utcunque exiguo; ita etiam actiones potentiarum & ponderum sunt æquales, & se tollunt mutuo in machina, quando potentia est ad pondus, ut hujus celeritas est ad illius celeritatem. Verum quamvis hæc observatio sua non careat utilitate, ac præterea plurimum oblectetur animus, si miram hujus principii confessionem in omnibus machinis certat, in quibus æquilibrium locum habet; attamen in hujus unius argumenti evidentia acquiescere, quando de re tanti momenti agitur, iniquum profecto foret. Quare legem æquilibrii in vête nova ratione primum demonstrabimus, quæ principiis clarissimis, & summe evidentibus innititur, cum id fundamentum sit omnium reliquorum, quæ in hoc genere adferentur; tum vero demonstrationem ejusdem legis a Newtono adhibitam dabimus; & tandem eam, quæ Archimedi tribuitur.

Fig. 18. 3. Illud imprimis evidens est, quod si duæ potentiaæ æquales in æqualibus utrinque ab hypomochlio, sive a centro motus, distantiis agant directionibus oppositis, & parallelis inter se, earum effectus idem sit futurus. Sic si (*fig. 18*) A B dividatur æqualiter in C, & potentia altera A agat directione A F in vectem, & altera æqualis B directione opposita priori, & parallela B E, actio utriusque potentiaæ ad movendum vectem circa centrum C æqualis erit, ita, ut alteram alteri semper substituere liceat. Præterea certum quoque est, quod si gravitas agat directionibus parallelis, ac hypomochlium sit intra corpora A & B, istud sustentare debeat summam eorum ponderum: vectis enim his ponderibus pressus necessario cedere deberet, si fulcrum non sustentaret utrumque. At vero quando utraque potentia A & B sunt ex eadem parte hypomochlii C (*fig. 19 N. 2*) (quod si fiat, altera, velut A, sursum tendere debet, altera B deorsum premente, ut æquilibrium habeatur), hypomochlium tantummodo differentiam potentiarum sustentat. Jam vero alterum semper ex altero infertur, si ex hypothesi, quod æquilibrium locum habeat, ex tribus potentiais in A, B & C applicatis concipiatur una instar hypomochlii, & reliquæ duæ cogitentur niti vectem circa eandem movere. Ex his autem principiis legem æquilibrii in vecte hunc in modum deducimus.

Fig. 20. 4. Ponantur primo potentiaæ æquales A & B (*fig. 20*) directionibus A F, B H agere, ut corpus C vecti in æquali utrinque distantia incumbens attollant: evidens est, a quavis harum potentiarum susten-

sustentari ponderis C dimidium, toto in utramque æqualiter distributo. Ponatur dein sublatæ potentiaæ A substitui fulcrum, cui incumbat extreum punctum vectis A: liquet porro, quod quemadmodum prius pondus C æqualiter in utramque potentiam distribuebatur, ita nunc quoque a fulcro A dimidium ponderis ejusdem sustentetur, cum eadem omnino hujus fulcri sit actio, ac fuerit potentiaæ A, cui surrogatum est. Et quia æquilibrium perstat, palam est, potentiam B dimidio ponderi C æqualem, isthic constitui cum eodem pondere C in æquilibrio, dum scilicet distantia ponderis C ab hypomochlio est dimidia distantiaæ potentiaæ B ab eodem hypomochlio A, hoc est, dum $B \times AB = C \times CA$. Ex planissima hac ratiocinatione manifestum fit, potentias non agere in vectem viribus suis absolutis tantummodo, sed earum effectum pendere simul a distantia puncti, in quo applicantur, ab hypomochlio, seu a centro motus; potentiam scilicet eadem vi pollere, qua dupla ad dimidiæ distantiam ab hypomochlio agentem, dum utraque est ex eadem fulcri parte, & directiones habent oppositas.

Alterum, quando potentiaæ ad vectis extrema applicantur, fulcro inter eas posito, principiis hilce jam numero præcedente stabilitis, ex priore infertur. Exhibeant enim BH & CG (fig. 21) directiones, & vires, quibus potentiaæ in B & C applicatae agunt in vectem. Producatur BA in E, ut sit $AE = AC$ seu $= \frac{1}{2} AB$, & potentiaæ CG substituatur in E altera æqualis EK directione opposita agens; erit per primum principium effectus potentiaæ EK æqualis effectui potentiaæ CG; & per princi-

Fig. 21.

pium alterum hypomochlium **A**, seu centrum motus, sustentabit summam utriusque potentiae **EK**, & **BH**; hinc æquilibrium in **EK** & **BH** non minus manebit, ac prius fuerit inter **CG**, & **BH**: quare potentiae **BH** & **EK** erunt in æquilibrio, si potentia **BH** fuerit dimidia potentiae **EK**, & distantia potentiae **EK** ab hypomochlio **A** dimidia distantiae, quam habet potentia **BH** ab eodem hypomochlio, hoc est, si fuerit potentia in **B** ad potentiam in **E**, ut est **A** **E** ad **AB**, seu si **B** × **AB** = **E** × **AE**.

Fig. 22. Quoniam hac stante hypothesi hypomochlium premitur ab utraque potentia secundum eandem directionem agente, ejus reactio debet æqualis esse summae earum **EK + BH = 3 BH**, & opposita directione fieri, nempe **AF**. Huic reactioni in **A** substituamus jam (fig. 22) potentiam **AF** æqualem triplæ **BH**, & loco potentiae **EK** ponamus hypomochlium **E** in extremo vectis **BE**; quia, ut prius, æquilibrium perstat, sequitur, quod posito fulcro in **E**, sive centro motus, potentia **BH** sustentet potentiam **AF** triplam, dum distantia potentiae **BH** a puncto **E** tripla est distantiae potentiae **AF** ab eodem, hoc est, quando **BH × BE = AF × AE**. Quod si ponatur potentia **EK** in suo loco relinquiri, sed (fig. 23) extrellum alterum vectis **B** incumbere hypomochlium; tum vero potentiae **AF** & **EK** sese sustentabunt, & altera alteram in æquilibrio retinebit, fulcro **B** in locum potentiae **BH** succedente. Erit autem hoc posito **AF = 3 BH**, & **EK = 2 BH**, adeoque **AF:EK = 3:2**; & quia distantiae **EB** & **AB** sunt in

in eadem ratione, liquet, quod si duæ potentiaæ, quæ sint ut 3, & ut 2, agant in vectem ex eadem parte hypomochlii, seu centri motus, directionibus oppositis, & in distantiis, quæ sint ut 2, & ut 3, eæ futuræ sint in æquilibrio. Demonstravimus itaque, quod seu potentiaæ sint in ratione 2 ad 1, seu 3 ad 1, seu denique 3 ad 2, modo earum distantiæ a centro motus, sive hypomochlio sint in eadem ratione reciproca, eæ se mutuo sustentent, ac æquilibrium constituant.

N. 1) 5. Accipiatur in BE producta (*fig. 24 Fig. 24 N. 1.*) $EL = EA$, & potentiaæ AF substituatur altera LM = AF, sed directione contraria agens: erit hujus actio ad movendum vectem circa centrum motus E eadem, ac prioris AF, per principium primum §. 3 adductum, atque ideo erit in æquilibrio cum potentia BH, non secus, ac fuerit AF. Unde si duæ potentiaæ, quæ sint ut 3, & 1, agant in vectem eadem directione, fintque earum distantiæ LE, & BE ab hypomochlio in ratione 1 ad 3, seu si sit $LM \times LE = BH \times BE$, in æquilibrio erunt. Hoc si ponatur, cum eadem sit utriusque potentiaæ directio, fulcrum E earum summam sustentare debet, nempe $LM + BH = 4$ BH, per alterum §. 3 principium. Igitur etiam si in L agat potentia ut 3, & in B potentia ut 1, & eadem directione, utraque simul æquilibrium constituit cum potentia ut 4 in E applicata, & contra directione agente. Hinc porro ulterius sequitur, quod si in locum potentiaæ ad L applicatae succedat hypomochlium, potentia ut 1 in B in vectem agens susten-

sustentet alteram potentiam ut 4 in E directione opposita agentem, quando est $BL : EL = 4 : 1$, seu quando potentiae sunt in ratione reciproca distanciarum suarum a fulcro, seu centro motus. At si potentiae BH substituatur in B fulcrum, patet, a potentia LM ut 3 in L applicata sustentari potentiam ut 4, quae in E directione contraria agat, distantias earum LB & EB a fulcro B sumptis in ratione 4 ad 3, id est, quando $LM \times LB = EK \times EB$. Accipiatur dein in LB producta

Fig. 24. (fig. 24 N. 2) $B_e = BE$, & loco potentiae in E substituatur in e potentia æqualis cum directione opposita; liquet ex principio primo §. 3, potentiam ut 3 in L fore in æquilibrio cum potentia ut 4 in e ejusdem directionis, si sit distantia LB ad distantiam eB, ut 4 ad 3. Hoc posito fulcrum B premitur a summa potentiarum L & e, seu potentia æqualis 7 BH in B applicata retinet eas in æquilibrio. Quare si substituatur in L fulcrum, vel in e, loco potentiarum ibi applicatarum, potentia in e ut 4 alteram in B ut 7 sustentabit, & vectem utraque eadem vi circa centrum L movebit, si earum distantiae a fulcro e L, BL fuerint ut 7, & 4. Item potentia ut 3 in L faciet æquilibrium cum potentia in B ut 7, si distantiae earum ab hypomochlio sint in ratione 7 ad 3.

6. Quodsi hunc in modum ratiocinemur, manifestum fiet, quod dum potentiae sunt in ratione numeri cujusvis ad numerum quemvis, earum vero distantiae a centro motus in ratione eadem reciproca, ex se mutuo sustentent, seu in æquilibrio sint. Unde faci-

facile generatim ostenditur, etiam æquilibrium inter eas haberi, si fuerint in ratione quavis incommensurabili, modo eadem sit reciproca ratio distantiarum. Etenim ratio illa incommensurabilium quantitatum semper potest esse limes inter duas alias commensurabiles, ita, ut semper proprius ad eam accedere liceat. Atque hoc genus argumenti mihi quidem ipsi naturæ maxime congrua, atque directa legis æquilibrii in vecte demonstratio videtur, atque adeo fundamentum totius Mechanics.

7. Quando centrum motus **C** est inter corpora **A** & **B**, incidit in eorum centrum commune gravitatis, Cap. 2 §. 13; adeoque si duo corpora ponantur conjuncta virga, quæ fleti nequeat, & sit gravitatis expers, si eorum centrum gravitatis commune sustentetur, etiam ipsa corpora sustentantur.

Si duæ potentiaæ, vel pondera **B** & **D** (fig. 25) in distantiis **BC** & **DC** a centro motus agant in vectem, vires earum sunt in ratione $B \times BC : D \times DC$, sive in ratione composita ponderum ipsorum, & distantiarum eorundem a centro motus. Etenim vis potentiaæ, vel ponderis **B** est in æquilibrio cum vi potentiaæ, vel ponderis alicujus **A**, si fuerit $A \times AC = B \times BC$; & vis ponderis **D** sustentatur a pondere **K**, applicato in distantia **CA**, si sit $K \times AC = D \times DC$: atqui vires ponderum **B** & **D** sunt inter se in eadem ratione, in qua sunt pondera **A** & **K**, quæ ad eandem distantiam applicata cum iis faciunt æquilibrium, seu in ratione A

Fig. 25.

B b × A

$\times AC : K \times AC$; igitur etiam in ratione his æqualium $B \times BC : D \times DC$. Hinc porro deducitur, quod si sit numerus quivis potentiarum in eundem vectem agentium, sitque summa factorum ex potentia qualibet in suam a centro motus distantiam ex una parte æqualis summæ factorum potentiarum ex altera parte applicatarum in suas itidem distantias ab eodem centro motus, omnes simul futuræ sint in æquilibrio. Verum, ut ostendimus §. 13, Cap. 2, hoc si contingat, centrum motus idem est cum centro eorum gravitatis communi; quare si quotcunque potentiae, aut pondera agant in vectem, & eorum centrum gravitatis commune reperiatur methodo illic tradita, atque eidem fulcrum supponatur, vectis in æquilibrio consistet. Similiter si plures potentiae, vel pondera applicentur ad planum lineæ rectæ datae I L incumbens (fig. 26) ita, ut eorum commune centrum gravitatis cadat in eam rectam, planum erit in æquilibrio. Cum enim per articulum præsentem summa factorum ex potentia utrinque in suas distantias a communi axe motus æqualis sit, earum vires ad movendum planum evadunt æquales, & quia contrariae sunt, effectus earum mutuo tollitur. Igitur quemadmodum jam superiore Capite ostendimus, motum vel quietem cujuscunque systematis corporum dependere a motu vel quiete puncti illius, quod centrum gravitatis dicimus; ita non minus notata digna est illa hujus puncti proprietas, quod si corpora inter se juncta sint lineis flexioni non obnoxii, & gravitatis expertibus, atque hoc punctum sustentetur, omnia ea corpora sustententur, ac in æquilibrio consistant.

8. Si

8. Si duæ potentiaæ **B** & **D** (fig. 25 & 26) <sup>Fig. 25.
& 26.</sup> conentur vectem circa centrum motus **C** movere, aut si in planum agant, ut illud circa axem motus **IL** convertant, earum effectus idem est, ac si potentia vel pondus earum summæ æquale in centro communi earum gravitatis **N** substitueretur. Est enim per §. 14 Cap. 2 $B \times BC + D \times DC = B + D \times NC$; aut si **Bb**, **Dd**, **Nn** sint ad **IL** normales in punctis **b**, **d**, **n**, per eundem articulum est $B \times Bb + D \times Dd = B + D \times N n$. Quodsi ponatur **G**, centrum commune gravitatis omnium potentiarum in vectem agentium, situm esse versus unam partem centri motus **C**, hæc pars vincet alteram; idem est, si centrum commune gravitatis potentiarum plano applicatarum cadat versus unam partem axis motus: atque tum licebit in centro communi gravitatis substituere unam, quæ aliarum summæ æqualis fit. Ostensum enim est, esse $B \times BC + D \times DC - A \times AC = A + B + D \times GC$, quando potentia **A** agit ex una, potentiaæ vero **B** & **D** ex altera parte. Unde quemadmodum centro communi gravitatis omnium potentiarum congruente cum centro motus omnia sunt in æquilibrio; ita si hoc centrum commune gravitatis non incumbat hypomochlio, sed extra illud versus alterutram partem cadat, neceſſe est, ut pars illa vincat; atque idem evenit, ac si omnes potentiaæ, vel pondera in centro illo collectæ forent. Analogia inter præsentia theorematata Statices, & illa, quæ in theoria motuum de hoc centro adduximus superiore Capite, non modo peculiarem attentionem meretur, sed etiam simplicitatem hujus

doctrinæ, omniumque ejus partium confessionem mirum in modum illustrat.

9. Newtonus propositionem primariam de vecte ex resolutione motus demonstrat. Sit in ve-
Fig. 27. cte **KL** (*fig. 27*) centrum motus **C**; **A** & **B**
 fint potentiae in **K** & **L** applicatae, quæ directionibus **KA**, **LB** agant. Ducantur ex centro motus **C** perpendiculares ad eas directiones **CM**, **CN**, sitque **CM** < **CN**; describatur centro **C** radio **CN**, circulus **NHD**, occurrens directioni **KA** in **D**. Potentia **A** exhibetur per rectam **DA**, resolvaturque in duas, alteram **DG**, directione **CD** agentem; alteram **DF**, cuius directio **DF** ad **CD** perpendicularis; & compleatur parallelogrammum **AFDG**. Jam potentia **DG** agens directione **CD** in centrum circuli, vel rotæ **DHN**, illud trahendo versus peripheriam, nihil confert ad motum ejusdem circa centrum a **D** versus **H**, sed tantummodo nititur rotam a centro dimovere. Hinc sola potentia **DF** ad motum rotæ directione **DHN** confert, quæ etiam ei tota impenditur. Potentia **B** æque in **N**, ut in **L** applicata concipi potest, & tota impenditur in motum rotæ directione contraria, ab **N** versus **H**, **D**. Quodsi itaque potentia **B** æqualis sit parti potentiae **A** per **DF** repræsentatae, vires æquales, & oppositæ suos effectus mutuo tollent; hoc est, si sit potentia **B** ad potentiam **A**, ut **DF** ad **DA** (seu ob similia triangula **AFD**, & **DMC**, ut **CM** ad **CD**, seu **CM** ad **CN**) potentiae erunt in æquilibrio, atque altera semper sustentabit alteram, si fint in ratione reciproca

ca distantiarum, quas habent earum directiones a centro motus, sive si factum potentiae unius in distantiam suae directionis a centro sit æquale facto potentiae ex altera parte applicatae in distantiam directionis illius ab eodem centro motus.

10. Demonstratio, quæ a plerisque Archimedi adscribitur, innititur huic principio, quod si corpus cylindricum, vel prismaticum applicetur vecti, idem præstet, ac si totum ejus pondus esset in medio axis illius puncto collectum. Sit **A B** (fig. 28) cylinder ubique homogeneus, **C** ejus medium: evidens est, quod si punctum hoc **C** incumbat hypomochlio, utrumque dimidium **C A**, **C B** sit in æquilibrio, & circa punctum **C** sustentetur. Dividatur vero cylinder in partes inæquales **A D**, **D B**, & secetur pars **A D** æqualiter in **E**, & pars **D B** æqualiter in **F**; sustentabitur pars **A D** a potentia æquali, & directione contraria agente, in **E** applicata; & pars **D B** sustentabitur etiam a potentia contraria, & æquali in **F** applicata; adeo, ut hæ duæ potentiae in **E** & **F** agentes, & partibus cylindri **A D**, **D B** singillatim æquales, idem omnino præstent, quod fulcrum in **C** suppositum, & totum cylindrum **A B** sustentans, atque hinc considerari possint velut in æquilibrio constitutæ cum potentia quadam tertia in **C** applicata, ac toti cylindro æquali. Est autem distantia **C E** = **C A** - **A E** = $\frac{1}{2}$ **A B** - $\frac{1}{2}$ **A D** = $\frac{1}{2}$ **D B**; & similiter distantia **C F** = **C B** - **B F** = $\frac{1}{2}$ **A B** - $\frac{1}{2}$ **D B** = $\frac{1}{2}$ **A D**; consequenter est **C E**: **C F** = **D B**: **A D**, sive ut potentia in **F** applicata est ad potentiam

Fig. 28.

tiam applicatam in E, quando potentiae istae sunt in æquilibrio cum pondere totius cylindri in C applicato. Ex quo manifestum est, potentias in E & F, quæ sint in ratione CF ad CE, se mutuo circa centrum C sustentare.

Fig. 29. 11. Cogitetur vectis AB (fig. 29) cum ponderibus suis A & B circa centrum C moveri; describent hæc pondera A & B arcus similes A a & B b, eritque $A a : B b = CA : CB = B : A$, consequenter $A \times A a = B \times B b$, hoc est, momenta sive quantitates motuum erunt æquales; & si quidem unum e corporibus A & B spectetur tanquam potentia, alterum ut pondus, erit potentia ad pondus, ut celeritas ponderis ad celeritatem potentiae. Itaque in hoc vecte, uti & in aliis machinarum generibus, quando potentia exigua elevat magnum pondus, velocitas potentiae multo major est velocitate ponderis, & lucrum virium propterea dispendium temporis est. Eodem modo si ponantur plures potentiae in vectem agere, isque circa centrum commune earum gravitatis C moveatur, summa momentorum ex una parte æqualis est summæ momentorum ex altera.

12. Vectis plerumque triplex species consideratur: in prima centrum motus est inter potentiam & pondus; in secunda pondus inter centrum motus & potentiam; in tertia potentia applicatur inter centrum motus, & pondus. In ultima hac specie potentia debet excedere vim ponderis ea ratione, qua ejus distantia a centro motus minor est, quam distantia ponderis ab eodem cen-

centro. Verum uti per priores binas species vectis, ope motus celeris potentiae, efficitur motus latus in pondere; ita in postrema hac motus tardior potentiae gignit motum velociorem ponderis. Atque ad hanc ultimam vectis speciem motus muscularis in animalibus pertinet, cum musculi multo proprius ad centrum motus inserti sint, quam sit locus ille, cui applicatur centrum gravitatis corporum elevandorum, ut adeo multum potentia muscularum pondera sustentanda excedere debat. Quamvis autem hoc primo intuitu dispendium quoddam pro animalibus videri possit, nihilominus est singulare artificium fabricae corporis animalium: quodsi enim in hujusmodi structura musculares potentiae in majore distantia, quam pondera, applicatae forent, figura animalium non modo deformis esset, & incommoda, sed etiam edendis motibus inepta, ut Borellius Tractat. *de motu animalium* demonstravit.

13. Si vectis duo brachia non jaceant in directum, sed alterum alteri sub angulo quovis non mutabili sit connexum ad C (fig. 30), lex æquilibrii eadem manet, ac si in eadem recta sita forent; hoc est, si potentia P brachio CB in B applicata sit, & pondus W agat ope trochlearis M directione A M ad brachium CA perpendiculari, potentia, & pondus se sustentabunt in æquilibrio, si fuerit P : W = CA : CB, seu $P \times C B = W \times C A$ Quod si plures potentiae simul agant in brachium C A, inveniatur earum commune centrum gravitatis in A in eodem brachio, per §. 13 Cap. 2, & finatur.

Fig. 30.

gatur, quod ibi omnes eæ potentiae sint collectæ: si jam fuerit potentia P ad illarum summam, ut est CA ad CB, habebitur utrinque æquilibrium. Et porro si ponatur summa potentiarum data, evidens est, quo earum centrum gravitatis commune A longius a centro motus C fuerit, eo magis illas posse potentiae P resistere, cuius adeo vis augenda erit, ut eas superare possit. Hinc recte conficit Galileus, ossa animalium, manente eorum pondere eodem, ex eo capite fieri firmiora, quod intus cava sint; sive si CBF exhibeat longitudinem ossium, & circulus CDH sectionem ad longitudinem perpendiculararem, P potentiam quamvis ad quodvis longitudinis punctum applicatam, quæ nitatur ea, frangere; concipi potest, quasi tota vis fibrarum longitudinalium, qua cohæsio partium conservatur, esset in A, centro circuli CHD, & communi centro gravitatis harum virium, collecta, si sectio CHD est circulus, vel annulus: atqui manifestum est, areaectionis, seu numero fibrarum dato, distantiam CA fore maiorem, quando sectio illa est annulus, quam quando est circulus cavitatis omnis expers; atque ideo vis partes uniens, & resistens potentiae P eas separare conanti, in eadem ratione major est. Ex hac ratione culmi tritici, plumæ avium, & cuspides cavæ magis resistunt iis, quæ hæc corpora rumpere nituntur, quam si ejusdem ponderis, & longitudinis forent, sed omni cavitate destituta. Apparet adeo, quod hisce in rebus ars sapientissimam naturæ structuram tantummodo imitetur.

14. Idem Auctor animadvertisit, quod inter corpora similia, seu Mechanica, seu animalia, ea, quæ majora sunt, magis obnoxia sint discrimini, quam minora, atque vires moli collatas habeant minores, hoc est, quod majorum vires non sunt e magnitudine metiendæ. Ex causa magna columna in majore versatur periculo, in fragmenta diffiliendi, dum cadit, quam minor majori similis; homo adulatus majoribus damnis per lapsum expositus est, quam insans; insectum quodpiam defert saepe pondus se ipso aliquoties majus, cum ex opposito animalia magna, v. g. equi, vix sibi æquale portare possint. Ut res hæc ostendatur, sufficit monstrare, quod in corporibus per omnem molem æquabilibus, ac ejusdem plexus partium, si majora sunt, vis nitens ea rumpere, aut damno afficere, crescat in majore ratione, quam vis, qua se conservant, ac adversus læsionem muniuntur. Sint itaque (fig. 31) AB
Fig. 31.
DE, FGHK trabes similes formæ cylindricæ, aut prismaticæ, in muro quoipiam IL immobili fixæ; consideremus autem in præsens tantummodo proprium earum pondus, neglecta omni alia vi, quæ ad eas rumpendas applicari posset. Dividatur AB in C,
& FG in M bifariam; poterunt earum pondera concipi velut in punctis C & M collecta, quæ puncta accurate infra centra gravitatis earum sumantur. Fingamus majoris facilitatis calculi gratia $A B = 2 FG$; erit pondus trabis ABDE octuplum ponderis trabis similis FGHK. Cum itaque pondus prioris trabis concipiatur in C collectum, & secundæ pondus in M, sitque distantia AC dupla distan-
tiæ FM, sequitur, vim, quæ nititur trabem pri-

C c mam

mam in A rumpere, atque octupla est illius, quæ conatur trabem alteram in F frangere, & præterea ad duplam distantiam applicatur, habere actionem decies, & sexies majorem, quam sit actio in alteram. Ut vero etiam vires, quæ læsioni harum trabium in muro fixarum resistunt, compare possimus, sit ARE sectio trabis majoris ad longitudinem perpendicularis, FSK minoris, in punctis A & F: dividantur AE in p, & KF in q bifariam: erit numerus fibrarum longitudinalium, quarum cohæsio separationi partium resistit, vel potius ipsa cohæsionis quantitas, in trabe majore ad cohæsionem in trabe minore, ut area sectionis ARE ad aream sectionis FSK, hoc est in exemplo proposito, ob similitudinem sectionum, ut quadratum AE ad quadratum FK, sive ut 4 ad 1. Potest autem cohæsio partium contiguarum in sectione ARE concipi, quasi tota esset in commune gravitatis centrum p collecta, uti etiam cohæsio partium in sectione FSK considerari potest velut unita in q: itaque cohæsio læsioni in trabe majore resistens erit quadrupla illius, quæ resistit separationi in trabe minore, & simul agit in distantia dupla a centro motus, quoniam $A \cdot p = 2 \cdot F \cdot q$; ut adeo vis impediens, ne frangatur trabs major, sit octupla illius, quæ impeditur ad conservationem trabis minoris. Unde reperimus, vim rumpendi trabem majorem in A esse decies sexies majorem vi rumpendi minorrem in F; vim autem cohæsionis, quæ damno resistit, in majore trabe tantum excedere octies illam, quam habet trabs minor. Et universe facile inventitur eadem methodo, vires tendentes ad separationem

tionem partium trabium, ac e propria gravitate provenientes, crescere in ratione quadruplicata longitudinum, dum vires his contrariæ, & ad conservationem utiles, tantum in ratione triplicata earundem longitudinum augentur. Ex quibus sequitur, majores trabes facilius frangi, quam minores similes; & quamvis minor aliqua firmitatem debitam habeat, potest tamen major, si illi similis fiat, excrescere ad tantam longitudinem, ut eam proprio pondere rumpi necesse fit. Quam ob rem Galileus non sine ratione deducit, machinas, quarum moduli firmitatem necessariam habent, effectumque eorum dimensionibus congruum præstant, si ad exemplaris proportionem, construantur, quandoque evadere debere admodum fragiles, atque proprii ponderis sustinendi impotentes.

15. Ulterius concludit celebris hic vir ex iisdem principiis, tam operibus naturæ, quam artis, necessario esse quosdam limites, quos magnitudine excedere non possint. Si arbores molem, qua nunc sunt, multoties excederent, earum rami propria gravitate frangerentur; animalia majora vires non haberent volumini suo respondentes, & si quidem terrestria iis, quæ noscimus, multo essent majora, vix sese movere possent, atque maximis periculis essent exposita. Verum aliter de marinis sentiendum, quoniam aqua eorum corpora magnam partem sustentare juvat; unde etiam videmus ab hisce maxima terrestrium plurimum superari. Nec adversus hæc facit, quod quædam ossa reperta sint, quæ credita sunt fuisse gigantum enormis magnitudinis, uti

sunt sceleta , de quibus Strabo , & Plinius loquuntur , quorum alterum fuerit 60 , alterum 46 cubitorum . Etenim rerum naturalium studiosi non immerito existimant , ejusmodi ossa vel fuisse elephantorū , vel (uti præter morem ingentia) balænarum , varia in loca delata , ac postea , obliterata jam mutationum memoria , quæ superioribus sæculis in natura evenerunt , reperta . Illud interim fatendum est , nullam afferri posse rationem solidam , cur homines nequierint dari , qui maximos eorum , quos in præsens cognoscimus , multis pedibus superarint altitudine . Hac de re Dissertatio D. Hans Sloane in Transact. Phil. aliaque in Monum. Acad. Reg. Scient. ad A. 1727 Lectori utilia , nec injucunda extant . Quodsi eadem leges cohæfionis , & attractionis in aliis etiam planetis , præter tellurem , obtinent , fortassis commodo suo non caret , quod gravitas prope eorum superficiem non multum discedat a gravitate , quæ in telluris superficie observatur . Atque id fortassis innuit Newtonus , dum ait , non sine consilio factum esse , ut longe minor esset gravitatis differentia in planetarum superficiebus , quam quis credere possit , si tantum magnitudinis eorum discrimen spectetur .

16. E §. 14 sequitur , quod ut corporum , machinarum , aut animalium robur magnitudini congruat , majorum soliditas augeri debeat . Sic ut cylinder major A B D E , sit æque firmus , ac minor F G H K , sectio illius A R E , & diameter A E eo usque augeri debet , donec vis , quæ partes conjungit , habeat ad vim contrariam eandem rationem ,
quam

quam in cylindro minore habet. Hoc judicium cum in nobis perpetua experientia firmetur, semper notionem roboris conjungimus alteri, quæ corpora crassiora exhibet; & dum imaginem agilitatis nobis effingimus, una gracilitatem addimus: hujus rei ratio habetur maxime in Architectura, in qua non minor cura est firmitatis apparentis, quam veræ, ut etiam oculo judicio pollentis spectatoris fiat satis, diversorum ordinum columnis diversos soliditatis gradus repræsentantibus. At si juxta idem principium cogitemus animalia admodum robusta in ratione eorum magnitudinis, necesse est, ut ea enormis ponderis fiant, itaque sua torpeant mole pressa, ut & sibi ipsis sint inutilia, & deformia aspectu. Quare tum isthic, tum in rebus omnibus aliis, ad illorum arbitrium dimensiones exigendæ sunt, quorum judicium plurimorum calculis probatur, neque educatione, aut prodigiosarum rerum narrationibus corruptum est, sed ex ipsa natura haustis principiis nititur. Quamvis consuetudinis tanta sit vis, atque in notiones nostras tanta efficacia, tamque manifestus influxus, ut sëpe difficillime etiam accurata attentione rationes veras deprehendere possimus, cur aliquid nobis placeat.

17. Quæ ad vectem pertinent, fusius exposui-
mus, ut, quæ de aliis supersunt machinis, brevius
exequi possimus. *Libra* usitata nihil aliud est, quam
vectis duorum æqualium brachiorum **A G**, **G B**
(fig. 32), centro motus plerumque directe supra **G** Fig. 32.
posito. Quodsi enim hoc foret in **G**, pondera æqua-
lia ex **A** & **B** suspensa sese in quovis vectis **A B**

situ sustentarent; at quando centrum motus est supra G. ea non æquilibrantur, nisi dum vectis est horizonti parallelus: dum vero pondus B a pondere A paullisper exceditur, alternis vicibus ascendunt, & descendunt, donec eorum centrum gravitatis commune g quiescat in linea verticali CG ubi a C sustentatur, & pondera in æquilibrio manent. Libra fallax est, si brachia AG, & BG sint inæqualia: & accuratio hujus instrumenti eo potissimum recidit, ut affrictus in centro motus G reddatur, quam fieri potest, exiguus.

18. *Axis in Peritrochio magnam cum vecte analogiam habet: potentia applicatur circumferentiæ rotæ; pondus attollitur ope funis circumacta machina axi circumvoluti.* Itaque potentia considerari potest velut vectis brachio applicata, longitudinis ejusdem cum radio rotæ; & pondus, veluti si penderet ex extremo alterius brachii radium axis longitudine æquantis, illudque solum adest discriminis, quod hæc duo brachia non ad idem centrum motus conjuncta sint, & quod ipsius hujus centri loco habeatur axis motus, is nempe, qui simul est axis totius machinæ. At quoniam nulla ex hoc capite in vires, & agendi modum differentia invehitur, sequitur, potentiam cum pondere fore in æquilibrio, quando sunt in ratione reciproca distantiarum ab axe machinæ, sive quando potentia est ad pondus, ut radius cylindri ad radium rotæ, ex hypothesi tamen, quod potentia agat directione ad radium rotæ perpendiculari: etenim si potentiae directio esset obliqua, radii loco sumi deberet perpendiculari-

ris

ris ab axe ad directionem ducta. Sic si A B D E (fig. 33) repræsentet cylindrum, H P N rotam, L M axem motus, sive rectam, circa quam tota machina versatur, Q punctum superficiei cylindri, cui pondus W applicatum est, P punctum, ad quod potentia agit, K Q radium cylindri, C P radium rotæ; si, inquam, potentia P agat directione ad C P perpendiculari, sitque ad pondus W, ut K Q ad C P vel C H, erit cum eodem in æquilibrio. At vero si potentiae directio fit alia quæpiam, v. g. P R, ducatur ad eam ex centro rotæ C perpendicularis C R; erunt P & W in æquilibrio, quando fuerit $P : W = K Q : C R$. Nam in hac hypothesi est eadem vis potentiae P, ac si in punto suæ directionis R ad C R perpendicularis applicata esset.

Fig. 33.

19. *Trochlea simplex* ad mutandam directionem potentiae, vel motus utilis est, nec virium compendium ullum, vel dispendium habet, nisi quod ex affictu provenit. Exhibeat M (fig. 34) trochleam simplicem, P N W funiculum trochleæ circumductum, cui potentia P, & pondus W applicatur. Manifestum est, quod si P & W sint æqualia, non secus habeatur inter ea æquilibrium, ac si ad æquales distantias M A, M B a centro vectis A B suspensa forent. Verum si præter trochleam fixam M (fig. 35) adhibetur alia mobilis L, annexum habens pondus W, & funis utrique circumducti extremum alterum retinaculo firmetur in E, alteri extremo applicata potentia P, liquet sane, a potentia P non nisi dimidium ponderis W sustentari,

Fig. 34.

Fig. 35.

quo-

quoniam funis **K N** non nisi dimidium illius portare debet, altero dimidio a fune **K E** sustentato. Inter hanc trochleæ applicationem, & vectem, in quo potentia ad duplam distantiam ex eadem parte centri motus cum pondere applicata est, manifesta analogia intercedit. Etenim si **A B** sit diameter trochleæ **L**, ad cujus extrema **A** & **B** funes parallelī **A E** & **B N** eandem trochleam tangunt, potentia **P** velut in **B** applicata concipi potest, pondus vero **W** in **L**, & centrum motus in **A**. Unde si ponamus, potentiam **P**, & pondus **W** moveri, cum **P** æquetur dimidio **W**, erit velocitas ponderis **W** dimidia velocitatis potentiae **P**, seu factum ex **P** in suam celeritatem erit æquale facto ex **W** itidem in celeritatem suam. Nam ut pondus **W** attollatur uno digito, uterque funis **E K** & **N B** uno digito reddi brevior debet, & potentia, totum funem ex **E** per **K** & **N** trahens, duobus digitis descendere. Similis ratiocinatio reliquis trochlearum combinationibus applicanda est.

20. Si pondus **W** (*fig. 36*) per *Planum Inclinatum A C* descendat, pars ejus gravitatis reactione plani sustentatur, pars altera motum secundum plani longitudinem efficit. Esto **A B** plani altitudo, **B C** basis, gravitas tota ponderis sit ut verticalis **W M**, ac resolvatur in **W N** ad planum perpendicularē, & **W Q** eidem parallelam; erit pars prior ea, quæ a plano destruitur; pars altera, quæ ad motum confert juxta plani longitudinem. Quoniam triangula **W Q M**, **A B C** similia sunt, erit **W Q: W M = A B: A C**, & vis, qua corpus per pl-

planum inclinatum descendit, est ad ejus gravitatem totam, ut altitudo plani adejusdem longitudinem: & hinc vis directione QW ad AC parallela agens corpus sustentabit, si fuerit ad pondus totum corporis, ut AB ad AC.

21. Exprimat ABC (fig. 37) Cuneum in corporis findendi hiatum, cuius latera sint DE, DF, demersum: si ponamus, latera haec DE, DF reagere in cuneum directione ad DE, DF perpendiculari; & horizontalem EF occurrere ipsi DF in F, ac præterea vim, qua cuneus adigitur, esse in æquilibrio cum reactione laterum DE, DF, & habere directionem ad horizontem perpendiculararem, erunt tres istæ vires in ratione trium rectarum EF, DE, DF. Etenim e compositione motus deducitur, quod dum tres potentiae sunt inter se in æquilibrio, sint in eadem ratione, in qua sunt tria latera trianguli, parallela singula ad earum singulas directiones; & hinc etiam in ratione trium laterum trianguli ad eamdem directiones perpendicularium, cum posterius triangulum priori sit simile. Est vero EF ad directionem ponderis cunei, five potentiae cuneum impellentis, perpendicularis per hypothesin, & DE, DF sunt normales ad directiones, quibus itidem per hypothesin resistunt: quare vis cuneum adigens in hiatum EDF, & resistentiae laterum in eadem ratione sint, oportet, ac EF, DE, & DF. Quod si contingat diverso modo latera DE, DF cuneo separanda resistere, ratio virium ex iisdem principiis facile detegetur.

Fig. 37.

22. Si cogitetur in superficie convexa cylindri punctum quodpiam secundum ejus longitudinem motu uniformi progredi, & interea linea, quam describit, motu itidem æquabili circa axem converti, ex hoc motu composito curva spiralis nascetur. Si juxta hujus curvæ ductum fiant helices in superficie convexa cylindri, *cobleæ exterior vel solida* appellatur; at si eadem fiant in superficie interna concava, *cobleæ interna*, vel *cava* dicitur. Quodsi cochlea solida intra cavam moveatur, ac earum altera fixa maneat, machina componitur, quæ ingentem vim ad corpora comprimenda, seu etiam movenda habet. Si potentia P alterutram cochleam (fig. 38) directione ad basin parallela circumagat, pondus W sustentabit, si sit ad W, ut distantia duarum helicium vicinarum ad peripheriam circuli, quam ipsa potentia P percurrit: etenim potentia P unam revolutionem peragente, cochlea ad distantiam duarum helicium proximarum promovetur, estque velocitas potentiae ad velocitatem ponderis, ut circumferentia a potentia descripta ad binarum helicum distantiam. Idem reperietur, si consideretur cochlea instar plani inclinati cylindro circumvoluti. In hac machina affrictus est ingens.

Ex allatis machinis simplicibus compositæ oriuntur pluribus illarum inter se conjunctis, ut versus earum usus poscit; & eadem leges generales etiam in compositis observantur, illa imprimis, quæ §. 2 exposita est, potentiam, & pondus sese sustentare mutuo, quando sunt in ratione reciproca velocita-

citatum ad directiones , secundum quas agunt, reduc-
tarum , si quidem moverentur.

23. Hunc itaque in modum solutum est celebre Mechanics problema , quo petitur , ut datum pondus per datam potentiam moveatur , modo illud simul observetur , ut resistentia ex affrictu oriunda supereretur. Atque cum summi momenti sit , ut affrictus reddatur minor , varia in hunc finem excogitata sunt artificia. In variis rotarum generibus , quæ vehendis oneribus destinatæ sunt , affrictus , qui haberetur in circumferentia rotæ (si nempe rota non circumageretur), translatus est in circumferentiam axis , atque propterea imminutus est in ratione radii axis ad radium rotæ : unde patet , in rotis circa axem motis affrictum semper posse minui , minuto radio axis , vel aucto radio rotæ. Simili ratione decrescat affrictus , si axis rotæ non volvatur in cavo immobili , quod magnopere atteri solet , sed peripheriæ incumbat aliarum rotularum , quæ una cum axe circumagantur : hac enim arte affrictus , qui esset in peripheriis harum rotularum , in earum axes transferitur : & poterit semper magis affrictus tolli , si diætarum rotularum axes iterum incumbant aliis rotulis una cum iis circumvolutis. Fieri ceterum vix potest , ut leges universales simul , & exactæ de affrictu constituantur , quoniam is dependet a structura , & plexu corporum , a figura partium supra ceteras prominentium , a diversis cavitatibus earundem , a duritate , elasticitate , cohæsione , aliisque pluribus affectionibus. Quidam e Physicis statuerunt affrictum æqualem tertiae ponderis parti , si corpus in plano horizontali trahatur ;

tur; alii deprehenderunt, eum non nisi $\frac{1}{4}$, & quandoque $\frac{1}{6}$, vel $\frac{1}{7}$ ponderis totius æquare. Alii e recentioribus contendunt, affrictum non a superficie corporum, sed a solo pondere pendere. At enim neque hoc exæste cum vero consentire animadversum est. Quando celeritates sunt exiguae, ceteræque conditiones pares, affrictus fere in ratione celeritatum est; at quando velocitates admodum magnæ sunt, in majore multo ratione crescit, seu dein corpora adhibeantur sicca, seu oleo ungantur.

24. Alterum generale Mechanicæ problema, de quo superius diximus, est, definire rationem potentiae ad pondus, ut, cum semel ope machinæ potentia resistentiam ponderis superat, maximum effectum tempore dato, quem potest, præstet. Equidem manifestum est, quanti momenti hujus rei inquisitio sit, licet pauci Mathematici ad eam sufficienter adverterint animum. Cum potentia paullo exceedit eam, quæ ad sustinendum pondus requiritur, motus admodum latus est; & quamvis tum majus pondus elevetur, non tamen temporis jactura satis compensatur. Cum potentia multum superat ad pondus sustinendum requisitam, citius elevatur pondus; at fieri potest, ut exilitas ponderis plus incommodi habeat, quam celeritas utilitatis. Quare dispicendum est, qua ratione inter pondus & potentiam intercedente, factum ex celeritate in pondus sit maximum omnium, quæ haberi possunt; id enim metitur effectum per machinam præstitum tempore dato, qui eo major est, quo & pondus elevatum majus, & quo celerius elevatur. Dabimus itaque non nulla hujus

hujus rei exempla , quæ ex elementari Geometria demonstrari possint , optantes interim , ut huic tam utili Mechanics parti tempus majora addat incrementa .

25. Dum potentia resistentiam vincit , machinaque moveri incipit , motus ponderis gradatim crescit . Si actio potentiae ponatur constans , effectus in motum ponderis tanto minor semper fit , quo motus ponderis magis augetur . Ita actio aquæ fluentis , aut aeris in rotam , æstimari tantummodo debet ab excessu celeritatis ejus supra celeritatem a parte machinæ , in quam incurrit , jam acquisitam , aut a celeritate respectiva . Verum altera ex parte pondus corporis elevandi , & affictus motum machinæ retardant ; unde dum vires istæ , quæ hinc quidem motum machinæ accelerant , inde vero retardant , æquales fiunt , motus machinæ ad æquabilem redigitur .

Fig. 39.

Repræsentet A B (fig. 39) celeritatem aquæ ; A C celeritatem illius partis machinæ , quam aqua ferit , dum jam ad motum æquabilem pervenit ; exhibebit C B celeritatem respectivam , ex qua effectus machinæ pendet . Notum est , actionem fluidi in planum datum esse in ratione duplicata celeritatum respectivarum , consequenter pondus per machinam elevatum , postquam ad motum æquabilem pervenit , quoniam actioni elevanti æquale est , erit etiam ut quadratum C B . Ducatur hoc quadratum in A C , seu celeritatem machinæ ab aqua motæ , eritque effectus machinæ tempore dato præstitus ut $A C \times CB^2 = (si\ ponatur\ CB\ bisecta\ in\ D)\ AC \times 2 CD \times 2 DB = 4 AC \times CD \times DB$; hinc

D d 3

effe-

effectus machinæ erit maximus, si factum ex A C, C D, & B D fuerit omnium maximum, quæ ex eadem summa haberi possunt. Sed facile intelligitur, id factum esse maximum, si partes A C, C D, & D B sint æquales. Nam si describatur super A D semicirculus, & sumatur ordinata E C, erit $A C \times C D = C E^2$; est autem $C E^2$ maximum, si C sit centrum. Itaque ut factum $A C \times C D \times D B$ sit maximum, debet A D in C bifariam secari, & C B in D, adeoque partes A C, C D, D B æquales esse, aut celeritas machinæ ab aqua æquabiliter motæ debet esse $= \frac{1}{3}$ celeritatis aquæ A B. Hoc si fiat, insuper habitu affrictu, dum effectus machinæ est maximus, pondus elevatum est ad pondus æquale vi toti aquæ, ut $C B^2$ (seu quadratum celeritatis relativæ) ad $A B^2$, seu quadratum celeritatis absolutæ aquæ, vel ad quadratum celeritatis relativæ aquæ, celeritate machinæ = 0, id est, machina quiescente, sive ut 2×2 ad 3×3 , vel ut 4 ad 9 . Ut igitur machina effectum maximum præstare possit, non majus pondus applicari debet, quam $\frac{1}{3}$ illius, quod vi toti aquæ æquatur. Hoc argumentum fusius pertractatum reperies in Tractatu de Flux. §. 908.

26. Ut alterum adjungamus exemplum, fit datum pondus P, quod in verticali linea gravitate sua descendendo debeat ope chordæ P M W, & trochleari fixæ M elevare pondus W pariter datum (fig. 40) per planum inclinatum B D, cuius altitudo B A datur: quæritur positio plani B D, per quod

quod tempore minimo a pondere P attollatur W spatio verticali BA . Sit BC planum, cui si in-
cumberet W , foret in æquilibrio cum P ; erit per
§. 20 hujus Cap. $P : W = AB : BC$; sed per
§. indicatum W est ad vim respectivam, qua niti-
tur descendere per planum BD , ut BD ad AB ;
erit igitur P ad eandem vim respectivam, ut est B
 D ad BC . Quare excessus P supra vim ponderis W
descendendi per planum BD (qui est potentia ac-
celeratrix motuum utriusque ponderis P & W) est
ad P , ut $BD - BC$ ad BD , vel (si fiat BH
producta $= BD$) ut CH ad BH . Sed spatia
motu uniformiter accelerato percursa sunt in ratione
composita virium, quæ eos motus efficiunt, &
quadratorum temporum; & quadrata temporum sunt in
ratione composita ex directa spatiorum, & recipro-
ca virium: consequenter quadratum temporis, quo
 BD a pondere W percurritur, erit directe ut B
 D , & reciproce ut $\frac{CH}{BD}$; adeoque tempus erit mini-

mum, si $\frac{BD^2}{CH}$ aut $\frac{BC^2}{CH} + 2BC + CH$, vel

(quia $2BC$ constans est), si $\frac{BC^2}{CH} + CH$ fue-
rit minimum. Quemadmodum autem factum duarum
quantitatuum, quarum summa datur, maximum est, si ex
quantitatibus æquales sint; ita etiam liquet, minimam sum-
mam esse quantitatuum, quarum factum datur, æqualium;
adeo, ut sicut (§. 25) factum maximum ex lineis
 AC & $CD = CE^2$ habetur, quando $AC =$
 CD ,

CD , quavis alia sectione rectæ AD præbente par-
tes, quarum factum sit minus, quam CE^2 ; ita
summa $AC + CD$, ex quarum multiplicatione re-
ctangulum ipsi CE^2 æquale haberi potest, minima
sit, ubi $AC = CD$. Sed factum ex $\frac{BC^2}{CH}$ in
 CH est BC^2 , adeoque datum; igitur summa
 $\frac{BC^2}{CH} + CH$ erit minima, si $\frac{BC^2}{CH} = CH$,
hoc est, si $BC = CH$, aut $BD = 2BC$.

Ex his igitur colligitur, quod si pondus P
gravitate sua perpendiculariter cadendo attollere de-
beat alterum datum W ope plani inclinati ad alti-
tudinem perpendicularem AB , primo quærendum
fit planum BC , in quo si collocaretur pondus W ,
a pondere P æquilibraretur; dein accipendum B
 $D = 2BC$: aut quærendum est planum BD , in
quo a pondere P duplum ponderis W susten-
tari posset.

27. Fluidum directione, & celeritate AC
Fig. 41. (fig. 41) latum feriat planum CE &, ponatur hoc
planum sibi ipsi semper parallelum moveri direktione
 CB ad CA perpendiculari, nec aliam posse direc-
tionem habere. Quæratur jam talis positio plani
 CE , ut maximum impulsum ab actione fluidi reci-
piat. Sit AP ad CE perpendicularis in P , duca-
tur AK parallela ad CB , & PK ad AK nor-
malis in K ; erit AK mensura vis, qua quævis
fluidi pars planum CE direktione CB latum ferit.

Cum

Cum enim vis cuiusvis partis fluidi repræsentetur per AC, resolvatur ea in AQ parallelam ad CE, & in AP ad CE perpendiculararem; manifestum est, solam vim AP posse agere. Hæc iterum resolvatur in AL, ad CB perpendiculararem, & in AK eidem parallelam. Iterum patet, AL nullum posse motum efficere directione CB, ideoque solam AK esse mensuram vis, qua fluidum planum CE in directione CB propellit. Sint EM & EN perpendicularares ad CA & CB in M & N, erit numerus partium fluidi directione ad CA parallela latarum, & in planum CE incurrentium, ut EM: quare vis fluidi ad movendum planum CE in directione CB, cum sit ut pars motus AK, & numerus partium ferientium conjunctim, erit ut AK \times EM, vel (cum sit AK: AP (= EM) = EN:CE), ut $\frac{EM^2 \times EN}{CE}$.

Verum cum detur CE, problema huc credit, ut inveniatur positio plani, in qua $EM^2 \times EN$ est maximum. Sed quoniam summa $EM^2 + EN^2$ datur, quippe quæ semper (ob EN = CM) = CE^2 , sequitur $EN^2 \times EM^4$ esse maximum, quando $EN^2 = \frac{1}{3} CE^2$, quemadmodum §. 25 ostensum est, ex data summa AC + CB factum maximum esse $AC \times CB^2$, si $AC = \frac{1}{3} AB$. Quod si autem $EN^2 \times EM^4$ est maximum, etiam ejus radix quadrata $EN \times EM^2$ erit maximum. Quare actio fluidi in planum CE in directione CB movendum erit maxima, si $EN^2 = \frac{1}{3} CE^2$, adeo que

E e

que $EM^2 = \frac{2}{3} CE^2$, hoc est, si sinus EM anguli ACE, sub quo fluidum in planum CE incurrit, sit ad radium, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, quod sit (ut colligitur ex tabulis finuum) si hic angulus sit $54^\circ 44'$.

28. Ex his complura utilia Mechanices problemata solvi possunt. Si venti celeritas per AC repræsentetur, sectio alæ molendini per CE, cum ex machinæ constructione axis directe vento obverti debeat, nec alæ moveri aliter possint, quam directione ad axem perpendiculari, patet, sub principium ventum efficacissime agere ad accelerandum motum, si angulus, sub quo incurrit, sit $54^\circ 44'$. Similiter si CB exhibeat directionem, qua navis progreditur (neglecto motu in latus, & ejus tantum habita ratione, qui fit secundum carinæ longitudinem), & AC directionem venti ad directionem navis perpendicularem, situs velorum, ut navis maximum impulsu recipiat, est idem angulus $54^\circ 44'$. Eodem modo optima positio gubernaculi invenitur, ut maximum effectum in convertenda navi habeat. Et in literis (Transact. Philos. N. 471.) ad Equitem Martinum Folkes, Societatis Regiae Praefidem, ostendi, quomodo hic angulus ad structuram baseos alveolorum favi sit opportunissimus, ut maximo cum compendio mel suum apes in iis deponant.

29. Verum illud hic advertendum sollicite, quod quando sinus anguli ACE est ad radium, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, aut (quod idem) dum tangens est ad radium ut diagonalis quadrati ad suum latus, hic angulus tantum sit sub initium motus commodissimus,
ita

ita, ut in molendinis vento motis situs alarum talis esse debeat, ut ventus eas sub majore angulo, quam $55^\circ 44'$ feriat. Alibi enim demonstravi, quod postquam machina jam acquisivit celeritatem = c , effectus venti maximus sit, si tangens anguli, sub quo incurrit, sit ad radium, non ut $\sqrt{2}$ ad 1, sed ut $\sqrt{2 + \frac{9cc}{4aa} + \frac{3c}{2a}}$ ad 1, velocitate venti sumpta =

a. Si exempli causa $c = \frac{1}{3} a$, tum tangens anguli debet esse dupla radii, hoc est, angulus debet esse $63^\circ 26'$. Si $c = a$, ACE erit $74^\circ 19'$. Præsens animadversio magni momenti est, cum in hac machina alarum partes ab axe remotiores acquirant celeritatem, quæ comparata cum celeritate venti sat magna est, imo eam quandoque æquat; & maxime cum magni nominis auctor Daniel Bernoulli oppositum ex suis calculis deduxerit in sua *Hydrodynamica*, minimo loco maximi accepto: ubi infert, quod angulus, sub quo ventus alas ferit, ea ratione diminui debeat, qua distantia ab axe motus crescit, ut si $c = a$, angulus esse debeat 45° ; & si tota alæ longitudine sit unicum planum, illud inclinandum sit ad angulum 50° fere, medio accepto. Alibi ostendi, quomodo in hunc errorem Bernoullius inciderit (*Tractat. de Flux.* §. 914).

Eodem modo licet angulus $54^\circ 44'$ sit sub initium aptissimus, dum navis a vento impelli incipit, nihilominus is augendus est, cum velocitas navis crescit. Universe sit A a (ad C B parallela) ad AC, ut celeritas in directione CB a machina jam acquisita, ad celeritatem fluidi impellentis: in AC

producta accipiatur AD, quæ sit ad AC, ut 4 ad 3 : ducatur DG ad CB parallela, & centro C, radio Ca describatur arcus occurrens DG in g : situs plani maxime opportunus erit, si CE angulum aCg bifariam fecet. Plerumque existimant, ventum efficacissime agere, si velis perpendiculariter incumbat, præ omni vento e latere spirante, quæ opinio diversis magno ingenio nuper editis scriptis propugnata est, sed ut error caveatur, monere debemus, oppositum demonstratum esse in Tract. de Flux. §. 991, ubi alia quoque exempla generalis hujus Mechanicæ problematis occurunt, & quo Lectorem remittimus.

30. Machinæ, & potentiae in Mechanica adhiberi solitæ, ut diversæ sunt, ita diversis usibus sunt opportunæ, atque propterea sagacis structoris partes sunt, ut eas felicit, & inter se apte conjungat, quarum ope potentiarum dextra applicatione, minimoque sumptu effectus petitus obtineri possit. Vectis usus est, dum pondus ad exiguam altitudinem attollendum, saltem dum machina aliunde non movetur, uti dum in lapicidinis faxa e suis stratis extrahenda sunt ; at axis in peritrochio adhiberi potest ad pondera etiam ex profundissimis locis elevanda. Trochleæ ob exiguam molem facile, quo lubeat, transferendæ ad usus nauticos commode applicantur. Cuneus, dum corporum partes separari debent, præstat ceteris, uti cochlea dum comprimentæ constringendæque sunt ; quin ipse ejus ingens affrictus quandoque utilitatem eam habet, quod effectus jam editus conservetur. Firmitas, & soliditas ipsius

ipsius machinæ , omniumque ejus partium accommodata esse debet effectibus præstandis. Sic cum inventimus, quod centrum motus, dum inter pondus, & potentiam situm est , sustentet summam virium utriusque, sequitur, quando majora examinanda sunt pondera , libram exiguum adhiberi non debere: quippe cum ingente illa pressione structura machinæ lädere-
retur , nec certi quidquam de ponderum magnitudine statui posset. Pari ratione effectibus minusculis edendis machinæ magnæ ineptæ sunt. Verum hæc, aliaque id genus , experientiæ prudentis Mechanici relinquenda sunt.

31. At enim longe aliud sæpe in Mechanica spectatur, quam ut eleventur pondera, & resistentia superetur. Efficere motum ad certas leges compositum , qui metiendo tempori sit aptissimus , problema est in hac scientia summi momenti, atque per pendula horologiis applicata adhuc feliciter solutum ; quanquam etiam plura excogitata sint magna ingenii commendatione remedia, quibus motus minus æquabiles elaterum impulsu geniti corrigerentur. Fuerunt etiam plures , qui eo contulerunt omnem suam artem , ut motum perpetuum invenirent, verum nullo successu ; & sane si Mechanics principia spectemus , credibile redditur , ejusmodi motum fieri non posse. Sæpius , dum corpora in se mutuo agunt , lucrum quoddam motus absoluti habetur ; verum hoc in directionibus oppositis semper æquale est, nec quantitas motus directi unquam augetur. Ut motus sit perpetuus , opus est, ut corpora numero certo, certo in spatio, modoque certo sese moveant con-

tinuo, ideoque habeantur actiones perpetuo sibi succedentes tanquam in circulum, ut motus semper perduret; ita quidem, ut quævis actio, per quam quantitas virium absolutarum augetur (quarum diversa sunt genera) habeat alteram sibi ex opposito respondentem, quæ rursus incrementum illud elidat, & vires omnes ad pristinum statum restituat. Atque hinc nunquam orientur virium directarum incrementum, quo affrictus, & resistentia medii superetur, quibus obstaculis fiet, ut motus quivis paullatim extinguitur & qui per actiones illas efficiuntur, languebunt tandem, donec omnino emoriantur.

Fig. 2. Rei hujus veritas ut magis illustretur, illud monemus, dari a nobis facile, per motus resolutionem lucrum aliquod, seu virium absolutarum incrementum haberij: sic vires A B & A D (*fig. 2*) simul sumptæ superant omnino vim A C, quæ in illas resolvitur; verum nullius machinæ subsidio fieri potest, ut motus hunc in modum in infinitum resolvatur. Ille enim, qui jam resolutus est, rursus componi debet, ut motus evadat perpetuus, ideoque incrementum per resolutionem acquisitum, rursus per compositionem perditur. Eodem modo si corpora A & B ponantur perfecte elastica, atque minus A in majus B quiescens incurrere, habebitur **Fig. 42.** (*fig. 42*) augmentum quoddam quantitatis absolutæ virium, cum minus post impactum resiliat. At si ponantur ambo circa centrum aliquod C moveri peracto confictu, ita, ut denuo sibi occurrant in a & b, augmentum illud peribit, & summa motuum ad eandem quantitatem, quæ prius erat, redigetur.

Qua-

Quare ejusmodi virium lucrum, quod per subsequentes actiones corporum deperditur, nunquam motui perpetuitatem conciliare potest. Dantur quidem plures alii modi vim absolutam augendi, verum cum augmentum hoc semper sit æquale in directionibus oppositis, & nullum in directione eadem, redeuntibus in circulum actionibus mutuis, quod ad motum perpetuum necessarium est, incrementum istud illico amittitur, neque sufficit ad affictum, & resistentiam medii superandam.

33. Observandum itaque est, quod quamvis in corporibus infinitis numero, aut in machina infinita, perpetuum dari possit augmentum virium, & motus in infinitum durare, non tamen inferri hinc queat, reapse mobile perpetuum posse construi. Illud, quod a Leibnitzio Mense Aug. An. 1690 in Act. Lips. propositum est e methodo communi vires corporum motorum æstimandi deductum, hujus erat generis, ideoque tum ex hac, tum aliis ex causis rejiciendum est. Attamen advertendum est, quod licet pluribus ex capitibus præstet tam vires, quam motum non ex quadrato, sed ex celeritate metiri, ut tamen corporum celeritas, dum semel moventur, augeri possit, potentia, seu causa hoc augmentum editura, in majore ratione, quam celeritatis illius, crescere debeat. Etenim actio potentiae in corpora a motu relativo unice dependet, adeo, ut actio tota causæ nequeat in motum corporum impendi, sed pars ejus non exigua ipsam causam quoddammodo applicare debet, atque in eo statu ponere, ut insequendo corpora jam mota in eadem agere possit.

Sic

Sic nequaquam tota venti actio in accelerationem motus navis impenditur, sed excessus tantum ejus celeritatis supra celeritatem velorum, in quæ incurrit, utraque scilicet ad eandem directionem reducta. Quando motus ope laminarum elasticarum efficitur, non nisi postrema contactu suo in corpus agit; reliquæ ejus actionem tantum sufficiunt; atque hinc majore opus est laminarum numero ad motus accelerationem, quam sit ratio illa celeritatis augendæ in corpore. Vis duplex, uti dupla gravitas, tempore eodem duplam quidem celeritatem generabit; & corporis elasticis duplex motus in altero itidem elasto duplum motum efficiet; at vero duæ impulsiones sese in sequentes, & inter se æquales, in idem corpus, nunquam duplum illius motus efficere possunt, quem prima dat impulsio: secundæ enim effectus ut minor sit, oportet, corpore scilicet jam in motu constituto, quam primæ corpore adhuc quiescente. Parem ob causam si succedant tertia, & quarta actio, erit effectus tertiae minor, quam secundæ, & quartæ minor, quam tertiae. Atque ex his colligitur, quid reponendum sit adversus argumentum, quo mobile perpetuum construi posse evincere nitebantur, ac quod minus accurate expensum suo non carere videtur robore.

Fig. 43-

Dividatur altitudo AB (fig. 43) in 4 partes æquales AC, CD, DE, EB: fingatur corpus A descensu per AC acquirere velocitatem ut 1, atque hic motus quomodounque communicari corpori æquali B; dum jam corpus A descensu per CD rursus acquirit motum ut 1, qui pari ratione transfertur in corpus B, hoc corpus B acquiret velocitatem ut 2, quæ suffi-

sufficit, ut ex B ad altitudinem A ascendat; & quoniam præterea remanet adhuc motus, quem corpus A descensu per DE, & EB acquirit, atque sufficit, ut interea machina aliqua in motu conservetur, dum corpora B & A alternis vicibus ascendunt, & descendunt, confici ajunt, posse hunc in modum sufficiens virium incrementum haberri, quo motus perpetuus efficiatur. Verum ex iis, quæ diximus, manifestum est, non posse per succedentes motus, qui singuli sint ut 1, in corpore B generari motum ut 2.

Fuerunt nonnulli, qui varia artificia ad motum perpetuum efficiendum excogitata eum in finem attulerunt, ut rem supra omnes vires positam hic agi ostenderent; sed quoniam minus solidis argumentis usi sunt, eos, qui vana spe inveniendi mobilis perpetui ducuntur, potius in suo errore confirmarunt. Hujus exemplum prostat in *Magia Mathematica* Doct. Wilkin Lib. II. Cap. XIII. Cogitetur magnes A (ig. 44) iis viribus præditus, ut possit corpus quodpiam per planum inclinatum FA ex F in B elevare; ubi corpus propria sua gravitate per curvam BEF iterum descendet, donec ad priorem suum locum F redeat, ita, ut denuo ascendet per planum inclinatum versus A, & per curvam BEF relapsum, perpetuo moveatur. Sed esto, BZE alia quæpiam superficies, cui si incumbat corpus, inter ejus gravitatem, & attractionem magnetis habeatur æquilibrium: occurret hæc alicubi inter A & F curvæ BEF in E, & corpus per eam curvam descendens, cum ad E pervenerit, quiescat.

Fig. 44.

C A P U T IV.

De Motu Corporum ex Impactu.

I. **Q**UAMVIS leges motus, & principia Mechanicæ superioribus Capitibus sat clare exposita, & demonstrata fuerint, antequam tamen ad sublimiora gradum faciamus, operæ pretium erit, si motus prius simplicissimos, atque quos frequentissime ob oculos habemus, cum phænomenis inde pendentibus, expendamus. Ipsæ allatæ jam Leges, & principia majorem inde lucem acquirent, atque methodus ratiocinandi, quam adhibuimus, evidentior reddetur. Motus autem, quos in præsens confiderandos suscipimus, ii sunt, qui e corporum mutuo impactu oriuntur, quos quidem observandi frequens se dat occasio, nobisque arbitrarium est, e quibus experimentis eos deducere velimus. Atque ut naturæ leges certius indagemus, a simplicissimis phænomenis initium ducendum, inde ad alia magis intricata progrediendum: incipere enim a difficilioribus, nil aliud foret, quam adversus rectæ methodi regulas peccare. Ita, qui de corporum inertia acturus, eamque dilucide expositurus, de experimentis Chemicalis, de fermentatione, de solutione corporum per menstrua, de phænomenis putrescentium, aliisque id genus implicatoribus differeret, risui profecto sese

ex-

exponeret : & si quidem quis hujusmodi res abstrufas ab initio contemplandas sibi sumat , facile in animum inducet , ut corporibus agendi quandam vim , eorum naturæ prorsus contrariam , tribuat . Unde principia hujus scientiæ ab observationibus , & experimentis , quæ in corporibus sensibus facile percipiendis , & majoris molis instituuntur , repetenda sunt . Doctrina de motu ex impactu corporum admodum clara , & methodo tam plana ex legibus communibus deducta habebatur , ut quisque de veritate facile convinceretur , antequam recentiores non nulli , in gratiam suæ opinionis de mensura virium corporum motorum , eam obscuram reddere conati fuissent . At enim nos isthic eorum rationem non habebimus , sed potius ex principiis secundo Capite stabilitatis , & illustratis , rem omnem dilucide non minus , quam solide deducere conabimur .

2. Corpora a plerisque in tres classes tributa sunt : perfecte *dura* dicuntur , quorum partes in impactu non cedunt , nec ullo modo flexiles sunt , cujusmodi existimantur esse elementa corporum , sive atomi . *Mollia* appellantur , quorum partes in collisione cedunt , nec se rursus priori situi restituunt . *Elasticorum* nomine ea censentur , quorum partes quidem in conflictu cedunt , attamen postea sese iterum in priorem statum recipiunt . Ex his postremis ea dicuntur perfecte elastica , quorum partes eadem visse restituunt , qua prius comprimebantur . Actio mutua corporum perfecte durorum , quorum partes fleti nequeunt , momento unico absolvitur : & cum omni elasticitate careant , nec ulla adsit vis , quæ

ea, ubi semel concurrerint, rursus separet, ita manent post impactum contigua, velut unum, idemque corpus constituerent. Sed cum in corpora elastica potentia quæpiam agit, eorum partes ab initio cedunt actioni, postea sese sensim reddunt pristino situ: quod ut fiat, tempore opus est, quod in duplum veluti periodum distinguendum est, alteram, qua durante partes corporum cedunt, magisque semper, ac magis comprimuntur; alteram, qua rursus a se recedentes priorem situm recuperant. Si duo corpora sphærica, & elastica sibi mutuo occurrant, primum quidem sese in puncto unico contingunt, tum vero superficies contactus gradatim augetur, ut scilicet partes subinde contiguæ, & se pressu mutuo urgentes, ulterius semper cedunt, donec ad compressionem maximam perventum sit: inde porro in oppositum redeunt, iisdem gradibus, sed ordine contrario. Hujus agendi modi corporum elasticorum speciem præbent elateres KL (fig. 14) inter corpora dura A & B interpositi: hi enim eundem effectum præstare debent, quem partes ipsæ corporum elasticorum: si corpus A versus B motum elateres premat, atque horum interventu agat in B, elateres magis semper comprimuntur, donec utrumque corpus habeat eandem velocitatem in directione eadem, & tunc, nulla vi amplius elateres comprimente, hi incipient se rursus extendere, & quidem iisdem gradibus, quibus compressi fuerant, sed permutato ordine: id, quod alteram actionis a vi elastica pendentis periodum exhibit. In priore enim illa, qua vel elasticorum corporum partes comprimuntur, vel interpositæ laminæ elasticæ a corporibus duris in concursu

Fig. 14.

cursu constringuntur, idem omnino præstatur effectus, qui in corporibus perfecte duris haberetur: & dum prima hæc actio extinguitur, corporumque respectiva celeritas, qua concurrerunt, sublata est, & secundum eandem directionem ad æqualitatem pervenit, jam altera succedit periodus. Cum itaque in hac altera actionum serie, quando elastica vis perfecta est, partes eodem nisu, quo compressæ fuerunt, se iterum restituant, corpora velocitate respectiva æquali illi, quam ante conflictum habuerant, a se recedere debent, & quantum utrvis eorum motus per primam periodum actionum accessit, vel decepsit, tantundem etiam durante altera restitutionis periodo secundum eandem directionem utrvis accedit, vel decedet, ita, ut utrumvis accurate duplum illius motus vel acquirat, vel perdat, quem acquisivisset, vel perdidisset, si utrumque fuisset perfecte durum.

3. Effectus primæ actionum periodi in corporibus imperfecte elasticis, non differunt ab iis, qui editi fuissent in perfecte elasticis; sed quoniam partes in hoc corporum genere minori vi restituendi se pollent, quam qua compressio fit, minus virium in altera periodo seu perditur, seu acquiritur, quam in prima. Interim tamen constans observatur ratio motus acquisiti, ac perdimi per utramvis actionum seriem in eadem corporum specie, ut adeo inter velocitates respectivas, quæ ante, & post conflictum habentur, ratio definita intercedat, quæ in vitro exempli causa est ut 16 ad 15.

4. In corporibus mollibus, quorum partes cedunt, neque in locum suum deinceps redeunt, actio eadem esse debet, ac in prima periodo elasticorum, vel in perfecte duris: eliditur enim eorum velocitas respectiva impetu, cum idem efficiat inertia, vel resistentia partium, quod in compressione praestat elasticitas. Peracto conflictu simul, unius massæ instar, progrediuntur, quippe vi elastica, quæ rursus ea separet, destituta. Verum quia in his corporibus partes cedunt, existimarent non nulli e Philosophis, perdi quandam virium partem in hoc ipso effectu. At enim nullus motus parti alicui communicatus perdi potest, quin in alias rursus partes transfundatur: corpus motum in fluido vim nullam amittit, nisi quam transfert in partes fluidi; & si quod agat in alterum molle, id ei tantum motus dedit, quod partibus corporis, in quod agit, communicat, quod proinde motus summae adjungitur. Partes quidem corporis mollis loco suo dimoventur; ast nihil virium propterea amittitur: evidens enim est, quod si A (fig. 45) moveatur, atque feriat B, illud ex B in b propellet, B vero in b occurrat alteri C, ita, ut ipsum B quiescat in b, evidens, inquam, est, quod vis omnis, quam sub initium A habuit, vel in A, vel in C reperiri debeat, nec ulla ejus pars translatione corporis B in b deperdi potest: nam A ex sua vi nihil amisit, quam quantum communicavit corpori B; nec ex ista corpus B aliquid perdidit, nisi quod transtulit in C. Certe in hac hypothesi nil plus virium amissum est, quam si corpus B in ipso loco suo B persistans percussisset tertium C, nec adeo plus etiam amitte-

Fig. 45.

mitteretur, si B duplo, vel triplo longius moveretur, antequam in C incurrat. Eodem prorsus modo, dum corpus aliquod in alterum molle agit, partes quidem illius loco movet, & vis a corpore primo amissa impenditur ad partes alterius movendas, quæ totam illam vim acquirunt, neque eam amittunt, nisi communicando partibus aliis: nec refert, quantonam spatio e loco suo dimotæ sint, sed id attendi solum debet, quantam vim acquisiverint, quam qui perdere possint, quod loco suo decendant, quin in alias partes agant, concipi nequit.

5. Atque huic principio sua semper constat firmitas, quamvis fingantur partes corporis mollis vi quadam certa, & definita inter se uniri, quod sequente ratione apertius exponetur: ponantur partes B, C & D (*fig. 46*) elatere quodam inter se nexæ, *Fig. 46.* A vero incurrere in C, situmque earum inter se mutare. Hoc si fiat, A nihil virium amittet, quod non communicetur parti C: attamen hujus vis pars quædam necesse est, ut elateris ope imprimatur partibus B & D, ut propterea vis tota ab A perdita, & in C non recepta, reperiatur in B, & D, si quidem elaterem tenuissimum esse cogitemus, vel ab ejus inertia interim abstrahamus animum, & vires omnes ad eandem directionem referamus.

Tendetur quidem elater vi, quæ primum corpori C imprimitur; sed cum C nihil possit amittere, nisi quod B & D recipiunt, nihil id virium adimet: & si quidem etiam elater rumperetur, ilud solum contingere, quod abrupto eo vinculo
dis-

disjunctis penitus partibus B & D nihil amplius a C communicari posset. Ex actionis, & reactionis æqualitate infertur, elaterem æqualiter agere in C & B, ut etiam in C & D, ut adeo tantundem virium addat partibus B & D, quantum a C accipit; quod cum semper verum sit, ipso quoque puncto temporis eveniet, quo elater frangitur, non secus, ac quovis alio priore. Quare cohæsio partium efficere non potest, ut virium aliquid pereat, modo earum omnium ratio habeatur, quas impactus afficit: nec ulla apparet ratio, ob quam pars motus consumi deberet in dimovendis e situ suo partibus corporis molliis, quæ ab ea diversa sit, quam massa tota recipit, quamdiu nempe omnis ea partium collectio persistit.

6. His rite animo comprehensis, ponantur Fig. 47. primo corpora A & B (fig. 47) vis elasticæ experientia, eorumque centrum commune gravitatis in C; velocitates eorum ante ictum exhibeantur rectis A D & B D; si jam A incurrat directe in B, post ictum utrumque simul progredietur, veluti in unam massam coaluisset, & quia centrum commune gravitatis una cum iis progreditur, eorum celeritas communis eadem erit, ac hujus centri, quæ (per §. 15 Cap. II) eadem est ante, ac post ictum. At vero eo tempore, quo corpora ante conflictum percur- runt rectas A D, & B D, centrum gravitatis ex C in D movetur, ubi nempe fit conflictus; quare communis velocitatis post ictum mensura est CD, si velocitates ante ictum per A D & B D singillatim exhibeantur. Exprimit autem C D æque directio- nem,

nem, ac velocitatem motus post ictum, cum semper sit in directione a C versus D. Si D incidat in C, CD evanescit, & motus utriusque corporis per conflictum extinguitur. Atque hujus propositionis usus est in iis definiendis, quæ in conflictu corporum perfecte durorum vel mollium contingunt.

7. Si corpora sint perfecte elastica, accipiatur $CE = CD$, sed in directione contraria, & celeritates corporum A & B post ictum, ipsæque eorum directiones erunt EA & EB, altera alterius. Quoniam enim mutatio in eorum motibus conflictu inducta in hac hypothesi est dupla illius, quæ fieret in perfecte duris, per §. 2; & differentia inter AD & CD (quæ est mutatio velocitatis corporis A, cum durum ponebatur, æqualis est differentiæ inter CD (seu CE), & EA, sequitur, velocitatis in corpore A post ictum mensuram esse EA: sic quoque cum differentia inter EB & CD (vel CE) five CB, æquetur differentiæ inter CD & BD, post ictum velocitas corporis B erit EB. Quod si B fingatur ante ictum quiescere, & velocitas corporis A exhibetur per AB, sumatur CE æqualis, & opposita rectæ CB, & erunt velocitates corporum A & B post ictum ut EA & EB: quo posito erit velocitas corporis A ante ictum, ad velocitatem corporis B post ictum, ut AB ad EB, seu $\frac{1}{2}CB$, hoc est, ut $\frac{1}{2}AB$ ad CB; & hinc (quæ affectio est centri communis gravitatis) ut dimidia summa corporum A & B ad corpus A.

Ex hoc Theoremate citra alterius subsidium ea omnia, quæ in motu corporum perfecte elasticorum eveniunt, deduci possunt. Exempli causa, si $A = B$, erit $CA = CB$; & quia $CE = CD$, sequitur esse $EA = BD$, & $EB = AD$, hoc est, per ictum corporum velocitates permutari.

8. At si corporum vires perfecte elasticæ non
Fig. 48. fint, sumatur CE (fig. 48 N. 1) æqualis & op-
N. 1. posita CD , sed Ca minor, quam CA , & Cb mi-
nor, quam CB , in eadem ratione, qua eorum elas-
ticæ vis a perfecta deficit; repræsentabunt Ea &
 Eb eorum velocitates post ictum, per §. 3; quod
si enim tempus, quo corpora in se agunt, in
duas periodos distinguamus, ut eo articulo præscribi-
tur, effectus a secunda actionum periodo pendens
minor erit effectu prima periodo edito in ratione hac
data. Quod si ita sit, corporum velocitas respecti-
va post ictum exhibebitur per ab , eritque ad ve-
locitatem eorum respectivam ante ictum, ut ab ad AB . Newtonus reperit, in vitro hanc rationem esse
ut 15 ad 16, ut superius annotavimus; unde si ef-
fectum per conflictum præstitum definire velimus, ac-
cipienda erit $Ca = \frac{15}{16} CA$, & $Cb = \frac{15}{16} CB$.

9. Si motus hunc in modum a corpore A
communicetur seriei corporum progressionem Geo-
metricam constituentium, etiam celeritas corporibus
hisce, aliis post alia, communicata erit in progressio-
ne Geometrica: & si A & B sint prima duo, ratio
communis celeritatum erit semisummæ corporum A
& B ad corpus A , hoc est, si A & B exhibeantur

tur rectis oa & ob (fig. 48 N. 2), & ab divida
tur bifariam in e , ratio communis binarum quarum-
vis celeritatum corporum se in serie excipientium erit
 oe ad oa : si n sit numerus corporum dempto primo A,
erit velocitas postremi ad velocitatem primi, ut
dignitas de oa , cuius exponens est n , ad dignita-
tem eandem de oe .

Fig. 48.
N. 2.

10. Si tria corpora exhibeantur tribus rectis oa , ob , & od , sumatur of ad od , ut est oa ad ob . Si jam motus incipiat a primo oa , a quo alterum ob quiescens feriatur; & ab hoc tertium od pariter quiescens; erit celeritas hoc modo tertio communicata ad celeritatem primi, ut est oa ad $\frac{1}{4}$ summæ de oa , ob , of & od . Nam velocitas primi oa est ad velocitatem secundi ob , ut $oa + ob$ ad $2 oa$; & velocitas secundi ob est ad velocitatem tertii od , ut $ob + od$ ad $2 ob$; igitur velocitas primi est ad velocitatem tertii, in ratione composita de $oa + ob$ ad $2 oa$, & de $ob + od$ ad $2 ob$, hoc est (cum oa , ob , of , od sint proportionales, adeoque $oa : ob = oa + of : ob + od$; & $oa + ob : ob = oa + ob + of + od : ob + od$) ut summa $oa + ob + of + od$ ad $4 oa$. Unde data velocitate oa , velocitas communicata tertio od est reciproce ut summa $oa + ob + of + od$, estque maxima, quando hæc summa est minima, hoc est, quando datis oa & od , secundum ob cum tertio of abeunt in unum ok medium proportionale inter oa & od . Est ergo velocitas communicata od maxi-
ma, quando corpus ob , inter oa & od collocatum, est inter ea medium Geometrice proportionale. Est

hoc theorema ex Hugenianis. Ex quo illud etiam deducitur, quod eo major velocitas communicetur corpori od , quo plura media Geometrice proportionalia interponuntur inter oa & od ; quamvis certus sit limes, quem velocitas corpori od communicata attingere nequit, si oa , & od , nec non velocitas corporis oa ante ictum data sint, attamen proprius semper accedere, ut numerus corporum mediorum augetur: estque hic velocitatis limes, ut sit velocitas communicata ad velocitatem corporis primi oa ante ictum in ratione subduplicata oa ad od , quemadmodum in Tract. de Flux. demonstravimus §. 514.

II. Ex iisdem principiis metiendus est effectus, si corpus feriat simul quemcunque numerum aliorum quacumque directione dispositorum. Sint

Fig. 49. primo corpora perfecte dura, & vi elastica destituta, ac corpus C (fig. 49) directione CD motum, & celeritate itidem ut CD, feriat simul corpora A, B, E, ante ictum quiescentia, directionibus CF, CH, CK, quæ sint in eodem plano cum CD: ducantur Da, Db, De ad CF, CH, CK perpendiculares in a, b & e: reperiatur centrum commune gravitatis P corporum C, A, B, & E, si concipientur eadem in C, a, b & e ordine translata (per §. 13 Cap. II): ducatur DP, & huic parallela CL erit post ictum directio corporis C. Occurrat RP, ad DP normalis, rectæ CD in R; uti & DL, perpendicularis ad CD, rectæ CL in L. Quod si jam CL ita dividatur in G, ut sit CG ad GL in ratione composita ex CD ad CR, & C ad summam omnium corporum; velocitas corporis C post ictum erit ut CG, sive velocitas corporis C post ictum erit ad velocitatem ejus-

ejusdem ante ictum, ut CG ad CD. Sint G_f, G_b, G_k perpendiculares ad CF, CH, CK in f, b & k; erunt velocitates corporum A, B & E post ictum ut rectæ Cf, Cb, Ck.

At si ponamus corpora esse perfecte elastica, seu velocitates respectivas ante & post ictum, si ad eandem rectam referantur, esse semper æquales; producatur DG in g, donec sit $Dg = 2DG$; jungatur Cg, & corpus C post ictum movebitur recta Cg eodem tempore, quo ante ictum percurrisset CD. Eodem modo definitur motus, si vis elastica sit imperfecta, & detur ratio constans velocitatis respectivæ ante ictum ad velocitatem respectivam post ictum in eadem recta.

Hujus problematis limitatam admodum solutionem dedit Bernouillius (*Essai sur le Mouvement*. Paris 1726): sumit enim corpora perfecte elastica, & quod utrinque ad lineam directionis CD æqualia, quæ impulsæ moveantur rectis angulos æquales cum linea CD efficientibus, ita, ut corpus C post ictum eadem directione progrediatur, qua ante ictum. Peculiaris problematis hujus solutionem (quam miris implexam difficultatibus fingit, & velut fructum novæ de viribus corporum doctrinæ magnifice deprædicat) ex hoc principio petit: *quod summa corporum in quadrata suarum celeritatum ductorum sit eadem ante, & post ictum*, quod tamen principium nuspam demonstravit. Neque enim haberi potest tanquam consecrarium æqualitatis actionis & reactionis, ut ille incautius intulit, quemadmodum supra ostendimus. Verum solutio tam hujus,

quam aliorum plurium analogorum problematum , methodo plana , concinna , naturæ congrua , atque generali , ex illa lege deducitur , quæ pertinet ad summam motuum systematis alicujus corporum , si ad directionem datam referantur , & ex motu eorum centri communis gravitatis , quod mutua collisione non afficitur.

12. Si quæ §. 7 sumpsimus , nunc quoque Fig. 47. ita habere ponamus , quia $EC = CD$ (fig. 47) , erit $AD^2 - AE^2 = 4 CE \times CA$; & $EB^2 - BD^2 = 4 CE \times CB$. Est autem (ut proprietas exigit centri gravitatis in C) $A \times 4 CE \times CA = B \times 4 CE \times CB$; igitur $A \times AD^2 - A \times AE^2 = B \times EB^2 - B \times BD^2$, sive $A \times AD^2 + B \times BD^2 = A \times AE^2 + B \times EB^2$, hoc est , dum corpora sunt perfecte elastica , summa factorum e singulis in suæ celeritatis quadratum est eadem ante & post ictum. Positis iis , quæ articulo ultimo , sint DQ , gq , fm , bn , kr , ad CG in Q , q , m , n & r perpendiculares ; erunt rectangula ex Cm in CG , Cn in CG , Cr in CG æqualia quadratis de Cf , Ch & Ck , singula singulis. Si corpora sint vi elastica omni destituta , eorum velocitates post ictum erunt ut CG , Cf , Ch & Ck , si velocitas corporis C ante ictum sit ut CD ; id enim si contingat , nulla velocitas relativa ictu efficitur secundum eorum directiones respectivas , & summa $A \times Cm + B \times Cn + E \times Cr = C \times GQ$, quia summa motuum , quæ communicaretur corporibus A , B , & E in directione CG , est æqualis motui ,

tui, quem corpus C in eadem directione amitteret, per §. 4 Cap. II. Igitur summa $A \times C f^2 + B \times C b^2 + E \times C k^2 = C \times CG \times GQ$, & si addamus $C \times CG^2$, summa corporum omnium in quadrata suarum celeritatum ductorum erit in hac hypothesi $C \times G C \times CQ$; at sumptis corporibus perfecte elasticis, celeritates corporum A, B, & E exhiberi debent per $2 Cf$, $2 Ch$ & $2 Ck$; summa $A \times 4 Cf^2 + B \times 4 Ch^2 + E \times 4 Ck^2 = C \times 4 CG \times GQ$, sive (Elem. 8. 2) $C \times CQ^2 - C \times Gq^2$; cui si addamus $C \times CG^2$ (vel $C \times Gq^2 + C \times DQ^2$), habebitur summa tota omnium factorum, si corpus quodvis ducatur in quadratum suæ celeritatis, æqualis $C \times CD^2$, adeoque eadem ante, & post ictum. Quare si corpora vi elastica careant, hæc summa minor erit post ictum, quam ante ictum in ratione $CG \times CQ$ ad CD^2 , seu CG ad CL (si L sit punctum, in quo LD ad CD normalis occurrit rectæ CG). Quod si corpora A, B & E moveantur ante ictum directionibus diversis ab illa, qua corpus C in ea agit, propositio semper vera manet, modo motus eorum resolvatur in duas partes, alteram, quæ sit secundum has directiones, & quæ sola afficitur ictu; & alteram ad has directiones perpendiculararem. (Elem. 47. 1).

Eadem propositio locum habet, quando corpora perfecte elastica incurront in obstaculum immobile, æque, ac dum alterum ferit alterum; & denique quando per quamvis potentiam, vel resistentiam coguntur aliis directionibus progredi, quam secundum

cundum quas in se se agunt. Verum patet, hanc propositionem non haberi posse instar legis, vel principii universalis motus, quoniam ad unam tantum corporum speciem pertinet. Solutiones vero quorundam problematum inde derivatae, deduci possunt methodo communi, & directa, e principiis evidenteribus, & claris, de quibus inter omnes convenit, si primo definiantur motus corporum durorum, & omnis vis elasticæ expertum; inde autem eruatur, quid aliæ quævis conditiones exposcant, cum velocitates relativæ ante & post ictum sunt vel æquales, vel in quavis ratione data.

13. Quod postremo articulo demonstravimus, viam nobis aperit ad illud principium, quod Hugenius *conservationem vis ascendentis* appellavit. Certum est, atque §. 11 Cap. I demonstratum, altitudines, ad quas corpora contra directam resistentiam a gravitate uniformi provenientem ascendunt, esse ut quadrata celeritatum, quas sub ascensu principium habent. Dein ultimo paragrapgo invenimus, summam factorum ex corporibus in quadrata suarum celeritatum ductis esse eandem ante, & post ictum, modo corpora sint perfecte elasticæ. Unde si ponamus, motum corporum sursum dirigi in lineis verticalibus, erit summa factorum ex corporibus in suas altitudines, ad quas quodvis ascendit, ductis, eadem post ictum, quæ fuit ante ictum. At vero per centri gravitatis proprietatem (§. 15 Cap. II) summa factorum ex corporibus ductis in has altitudines æquatur facto ex summa corporum ducta in altitudinem, ad quam ascendit eorum centrum gravitatis;

qua-

quare si motus corporum in lineis verticalibus sursum dirigatur, eorum centrum commune gravitatis ad eandem altitudinem elevatur post ictum, ad quam ascendit ante ictum; id, quod Hugenius indicavit, dum dixit, *vim ascendentem* totius systematis corporum non affici eorum impactu, aut actione mutua, dummodo perfecte elastica sint; si enim corpora sint mollia, aut vi elastica imperfecta instrueta (quod quidem reapse reperimus in omnibus corporibus, in quibus experimentum capere possumus), evidens est, per hujusmodi impulsum mutuum eorum motum saepe minui, quandoque ex integro extingui, ut propterea centrum eorum gravitatis necesse sit ad minorem post ictum altitudinem ascendere, quam ante ictum, si eorum motus dirigatur sursum in lineis verticalibus.

14. Quando corpora vi propriæ gravitatis mota simul in se agunt, semper reperietur summa factorum ex singulis corporibus in quadrata velocitatum acquisitarum, æqualis differentiæ inter summam factorum ex corporibus descendantibus ductis in quadrata velocitatum, quas ex eadem altitudine libere cadentia acquisivissent citra impactum alterius in alterum, & inter summam factorum ex corporibus ascendantibus ductis in quadrata velocitatum respectivarum, quas libere cadentia ex iisdem altitudinibus, ad quas singula ascendunt, acquisivissent; modo corpora sint perfecte elastica; aut si elastica vi imperfecta sint prædita, si nullus fiat impactus, vel motus communicatio temporis momento peragatur. Etenim si eorum velocitates respectivæ secundum di-

H h rectio-

rectionem cuiusvis post talem actionem sint illico minores , quam ante eam ; summa factorum ex corporibus in quadrata celeritatum minor erit , quam si libere ex iisdem quælibet altitudinibus descendissent ; & si ponantur tempore quovis celeritatibus suis respectivis ascendere , nec eorum motus aliunde , quam ex gravitate retardari ; centrum eorum gravitatis non amplius ad eandem altitudinem attolletur , ex qua descendit , quemadmodum fusius in Tract. de Flux. §. 521 & 533 exposuimus .

15. Illud itaque hac in re certum , quod dum corpora quotcunque gravitate sua mota inter se quomodo cunque connexa sunt , ita , ut motu illo perdurante in sece mutuo agant , semper reperiatur ascensus eorum centri gravitatis intra vibrationem , aut revolutionem unam , vel æqualis ejusdem descensu , vel minor , nunquam vero major . Et ex hoc principio evidenter deducitur , motum perpetuum haberi non posse . Manifestum enim est , in ejusmodi vibrationibus , aut revolutionibus , ascensum centri gravitatis sensim debere minui tum partium attritu , tum medii resistentia : & quoniam ascensus centri gravitatis nunquam superat descensum (quamvis sæpe eo minor sit) , nullum haberi potest virium augmentum , quod hisce impedimentis tollendis sit satis . Omnis igitur motus in machinis quibusvis paullatim minui , & languere debet , nisi nova actio potentiae motus effectricis accedat .

16. Ceterum certissimum est , si ratio imperfectæ vis elasticæ in corporibus , frictionis , & resistentiae medii

medii habeatur, hanc theoriam apprime experimen-
tis consentire, atque una legum motus universalium,
indeque profluentium consectoriorum firmitati osten-
dendæ esse aptissimam; denique methodi, qua usi fu-
mus, præstantiam ob oculos ponere.

C A P U T V.

*De motu projectorum in vacuo ; de cydoide ,
& motu pendulorum in hac curva. (*)*

Lemma I.

I. **P**onamus motum corporis uniformiter accele-
rari, & tempus exhiberi recta AM (fig. I suppl.), ejusque partem aliquam per AK : duca $Fig. I.$ suppl.
 MN, KL ad AM in M & K perpendiculares, quæ se-
cent AN in N & L : erunt velocitates ab initio
motus temporibus AM, AK acquisitæ ut rectæ M
 N, KL ; spatia vero temporibus iisdem percursa ut
areæ AMN, AKL .

H h 2

Quam-

(*) Ne quid argumento hujus libri de esset, præsens Caput ex
iis adjunximus, quæ auctor suis discipulis scripto commu-
nicare solebat, atque desumpta sunt e Cotesii libro, cui
titulus *Harmonia measurarum*.

Quamvis hæc propositio alias jam demonstrata sit, lubet tamen demonstrationem per methodum indivisibilium, quæ plerumque dari solet, adjungere.

Quoniam motus per hypothesin uniformiter acceleratur, hoc est, quoniam corpus temporibus æqualibus æqualia celeritatis incrementa acquirit, erunt velocitates acquisitæ semper in temporum ratione, ita, ut si tempore AM acquisita sit velocitas MN , cum sit $AM : AK = MN : KL$, velocitas tempore AK acquisita repræsentetur per KL . Simili modo velocitates temporibus AB , AC , $AD \&c$ acquisitæ, erunt ordine ut perpendiculares BE , CF , $DG \&c$.

Spatium motu æquabili percursum est ut rectangulum sub lateribus, quæ tempus, & celeritatem exhibent; itaque spatia temporibus $AB, BC, CD, DH \&c$ & celeritatibus $BE, CF, DG, HI \&c$ descripta sunt ut rectangula $AE, BF, CG, DI \&c$, & spatia, quæ toto tempore AK describuntur, ut summa horum rectangulorum. Sed ut motus uniformiter, & continuo acceleratus esse possit, ponamus partium $AB, BC, CD \&c$ rectæ AK numerum augeri in infinitum, fiet summa rectangulorum AE, BF, CG æqualis triangulo AKL . Quare in motu uniformiter accelerato spatia temporibus AK , & AM descripta, & ab initio motus computata, sunt ut areae AKL, AMN .

Coroll. I. Spatium, quod motu uniformiter accelerato tempore dato percurritur, est subduplum illius, quod eodem tempore celeritate sub finem tem-

temporis acquisita fuisse descriptum. Etenim spatium motu uniformiter accelerato tempore **AK** descriptum exhibetur triangulo **AKL**; & spatium, quod eodem tempore motu æquabili, & celeritate in fine lapsus acquisita **KL**, describeretur, rectangulo sub lateribus **AK**, & **KL**: est vero triangulum illud hujus parallelogrammi dimidium; patet ergo propositio.

Coroll. II. Spatia motu uniformiter accelerato descripta sunt inter se, ut quadrata temporum ab initio motus elapsorum. Sunt enim ea spatia ut triangula similia **AKL**, **AMN**, quorum latera homologa **AK**, **AM** tempora repræsentant. Ex eadem causa spatia sunt etiam ut quadrata velocitatum **KL**, **MN** in fine temporum acquisitarum.

Coroll. III. Si vis acceleratrix fingatur in quavis ratione data major, vel minor, velocitates tempore dato ab hac vi genitæ in eadem ratione crescent, vel decrescent. Et datis temporibus velocitas a vi acceleratrice altera effecta erit ad velocitatem genitam ab altera, in ratione composita vi rum, ac temporum.

Coroll. IV. Quoniam motus corporum gravium, seu perpendicularis, seu per plana inclinata, uniformiter acceleratur, lemma hoc cum suis corolariis ad eundem pertinet.

Lemma II.

SI duo corpora vi gravitatis suæ e puncto quietis C cadant usque ad lineam horizontalem AB

Fig. 2. (fig. 2), alterum linea verticali CB, alterum per planum inclinatum CA: erit tempus descensus ex C in B, ad tempus descensus ex C in A, ut CB ad CA; & celeritates in B & A acquisitæ erunt æquales.

Exhibeatur enim gravitas, qua corpus linea verticali CB descendit, recta CB, & resolvatur in duas partes, BD, perpendicularem ad CA, & CD: patet, corpus secundum planum inclinatum descendens sola parte CD impelli: hinc vires acceleratrices corporum per CB, & CA descendientium erunt ut CB, & CD. Spatia porro temporibus æqualibus, & viribus acceleratricibus uniformibus descripta, sunt in ratione virium: igitur corpora spatia CB, & CD his viribus tempore æquali describent. Sunt autem tempora descensus per CD, & CA (per Coroll. II & IV Lemma. I) in ratione subduplicata ipsarum CD ad CA, hoc est (ob rationem continuam CD, CB, & CA) in ratione CD ad CB, sive CB ad CA.

Præterea velocitates lapsu acquisitæ sunt in ratione composita virium acceleratricium, & temporum, quibus acquiruntur (Coroll. III. Lemma I.), sive in præsente hypothesi in ratione composita ex CA

CA ad CB, & CB ad CA, quæ est ratio æqualitatis.

Lemma III.

Super eodem plano horizontali sit alterum inclinatum $c a$, cuius altitudo $c B$; ducatur CI ad $c a$ parallela, quæ occurrat piano horizontali BA in I; denique fiat BD ad CI normalis. Si, ut ante, CB exprimat vim constantem gravitatis, repræsentabunt CD, C d vires acceleratrices juxta planorum CA, CI (vel $c a$) directiones; & quia hæ vires sunt in ratione composita CD ad CB, seu CB ad CA; & CI ad CB, vel $c a$ ad $c B$, id est, in ratione $CB \times c a$ ad $CA \times c B$, manifestum est, eas esse directe ut planorum altitudines CB, & $c B$, & reciproce ut eorundem longitudines CA & $c a$.

Coroll. I. Si fiat ratio composita ex CA ad CB, \sqrt{CB} ad $\sqrt{c B}$, & $c B$ ad $c a$, habebitur ratio temporum descensus (Coroll. III Lem. I & Lem. III.) per CA & $c a$, scilicet directa longitudinum planorum CA, $c a$, & reciproca altitudinem CB, & $c B$ subduplicata.

Coroll. II. Cum velocitatem acquisitæ sint ut vires acceleratrices, & tempora, quibus generantur, conjunctim; si ratio virium Lem. III, & ratio temporum Coroll. præced. repertæ componantur, habebitur

tur ratio velocitatum , nempe subduplicata altitudinum CB & cB .

Fig. 3.

Coroll. III. Hinc porro infertur , quod si corpus ex quiete descendat per plana quotcunque CD , DE , EA , utcunque ad D & E inclinata, velocitas in A acquisita sit eadem , ac quæ acquireretur descensu per verticalem CB , neglecta illa diminutione , quæ ex impactu in plana ipsa oritur (fig. 3). Unde si numerus planorum inter C & A ita augeatur, ut tandem corpus moveatur in curva , erit nihilominus celeritas in A eadem cum illa , quæ descensu perpendiculari in B acquireretur. Denique si corpus alterum descendat per seriem planorum $c d$, $d e$, $e a$ &c similiūm , ac similiter positorum , planis CD , DE , EA &c , sive per arcum ca curvæ similem arcui curvæ CA ; erunt velocitates , & tempora in ratione subduplicata longitudinum , vel altitudinum CB , cB , vel quorumcunque laterum homologorum.

Fig. 4.

Coroll. IV. Sit AD (fig. 4) diameter circuli , quem tangat horizontalis AB ; AC , $A c$ sint chordæ quævis ex A ductæ: erit tempus descensus ex gravitate per quamvis chordam æquale, & velocitates ut ipsæ chordæ CA , cA . Jungantur enim DC , $D c$, & ducantur CE , $c e$ ad diametrum normales: quoniam triangula DCA : EC A ; item DcA , ceA similia sunt , facile ostenditur esse CA ad cA in ratione subduplicata altitudinum AE , & Ae : & si hæc ratio componatur fe-

De motu projectorum, & pendulorum. 249

secum ipsa reciproce sumpta, erit ratio æqualitatis temporum, per Coroll. I.

Sunt vero per Coroll. II velocitates in ratione subduplicata altitudinum AE, Ae, seu simplici chordarum CA, c A.

I.

De Motu Corporum Projectorum.

Propositio I.

Si corpus grave oblique projiciatur, parabolam describet.

Ponatur corpus projici directione ADH (fig. 5) ea celeritate, quam cadendo ex B in A acquisivisset. Si hæc vis sola ageret in corpus, motu æquabili percurreret rectam AD, & quævis hujus lineæ pars, velut AH exponeret tempus, quo eandem describeret. Et si sola gravitas ageret in idem corpus, percurreret eodem tempore v. g. spatium AP. Compleatur parallelogramnum APMH; erit mobile in fine temporis per AH exhibiti in loco M. Quoniam mobile (per Coroll. I Lem. I) celeritate cadendo per AB ac-

I i qui-

quisita eodem tempore percurreret motu æquabili $\frac{1}{2}$ AB, quo motu uniformiter accelerato percurrit AB, tempus hoc recte per $\frac{1}{2}$ AB exponitur. Unde cum tempus lapsus ex A in P exhibetur per AH, erit per Coroll. II ejusdem Lem. AP : AB = $AH^2 : 4AB^2$, adeoque $AP \times 4AB = AH^2 = PM^2$, quæ est æquatio ad parabolam, cuius parameter $4AB$, diameter AP, vertex A, & punctum M in parabola est.

Coroll. I. Evidens est, AH esse tangentem parabolæ in A, quia ordinatæ PM parallela est.

Coroll. II. Quoniam $4AB$ est parameter diametri AP, sequitur, parametros diametrorum per A transeuntium esse in ratione duplicata celeritatum projectionis, cum altitudines semper sint in ratione duplicata celeritatum cadendo ex B in A acquisitarum. Eodem modo liquet, manente celeritate projectionis, manere etiam parametros diametrorum AP, quæcunque sit directio AH.

Coroll. III. Si centro A, radio AB, describatur semicirculus BQL, ejus peripheria erit locus omnium focorum parabolæ, quæ celeritate per AB acquisita describi possunt. Nam distans foci a vertice diametri per A ductæ semper æquatur $\frac{1}{4}$ parametri, hoc est, ipsi AB; quare omnium parabolæ foci ut in semicirculo BQL sint, oportet.

Corol. IV.

Coroll. IV. Quod si directio projectionis detur, facile erit parabolam ipsam exhibere, cum alia re opus non sit, quam ut ducatur AF, ita, ut sit angulus FAD = DAB, quem scilicet linea directionis cum verticali AB facit; punctum F erit focus, in quo recta AF occurrit peripheriae. Ducatur per F parallela verticali FN, quae directricem parabolæ BE secet in N, erit FN pars axis, & medium ejus punctum I vertex parabolæ principalis, 4 FI parameter axis.

Coroll. V. Si ducatur per verticem I parallela directrici BE, quæ rectæ AB occurrat in C, ea in D per lineam directionis bifariam secabitur; & si ex foco F ducatur FD, ea erit ad tangentem perpendicularis, ac producta per B transfibit, ut ex proprietatibus parabolæ notum est. Hinc si super AB describatur semicirculus, is semper transfibit per D, ubi linea directionis tangentem parabolæ in I, id est, rectam CI, secat.

DEFINITIO.

Si per punctum A ducatur recta horizonti parallela, quæ axem in O, parabolam in K secet, erit AK amplitudo parabolæ.

Propositio II.

*A*mplitudo parabolæ semper est æqualis quadruplo sinus anguli dupli illius, quem linea directionis cum verticali efficit, sumpto sinu toto $= \frac{1}{2} AB$.

Nam $AK = 2 AO = 2 CI = 4 CD$; sed AK est amplitudo, & CD est sinus anguli DGB , qui est duplus anguli BAD , radio $GB = \frac{1}{2} AB$ accepto. Unde amplitudo parabolæ est quadrupla sinus pertinentis ad duplum angulum BAD , quem directio cum verticali comprehendit.

Coroll. I. Celeritate projectionis manente eadem, amplitudines sunt ut sinus duplorum angulorum inclinationis.

Coroll. II. Si angulus BAD non adæquet 45° , quo minor fuerit, eo minor erit amplitudo; nam decrescente hoc angulo, dupli quoque sinus decrescit, adeoque amplitudo, quæ sinus dupli anguli est quadruplum. Et dum angulus BAD evanescit, parabola AIK cum recta AB congruit, & corpus loco parabolæ rectam describit, ad B usque ascendens, inde in A relapsurum. At vero quo angulus BAD ad 45° proprius accedit, eo linea CD (sinus dupli anguli) magis crescit, adeoque etiam amplitudo, sinus illius quadrupla, augetur.

Coroll. III.

Coroll. III. Quando $BAD = 45^\circ$, puncta F & O in Q incident, ubi semicirculus BQL horizontalem AK secat, & sinus dupli BAD erit sinus 90° , consequenter æqualis radio GA. Et quoniam radius est sinus maximus, patet, fore tunc amplitudinem omnium parabolarum maximam, quæ jactu ex A, & celeritate cadendo ex B in A acquisita describi possunt. Porro quia sub isto angulo AK æquatur $4 AG = 2 AB$, intelligitur, amplitudinem maximam semper esse duplam AB. Itaque corpus ea directione projectum, quæ ad horizontem sub 45 gradibus inclinetur, ad majus in linea horizontali spatium deferetur, quam si quavis alia directione vi eadem projiceretur.

Coroll. IV. Quando BAD excedit 45 gradus, quo recto vicinior fuerit, eo parabola fiet latior, sed amplitudo ea ratione decrescit, qua augetur angulus. Est enim $AK = 4 CD$; sed quo major fit BAD, eo CD fit minor; igitur & AK. Si sint duæ directiones AD, Ad, quarum alterius elevatio tantum accurate excedit 45° , quantum alterius ab iisdem deficit, amplitudines æquales fiunt. Nam sinus duplorum angulorum, qui sese mutuo ad duos rectos compleat, æquantur; atqui dupli hi anguli se mutuo compleant ad duos rectos: sit enim A differentia eorum a 45° ; erit major $45^\circ + A$, minor $45^\circ - A$; dupli $90^\circ + 2A$, & $= 90^\circ - 2A$, quorum summa $= 180^\circ$. Quod si autem sinus æquales sint, patet, æqualia esse etiam sinuum quadrupla, sive amplitudines.

Coroll. V. Quando angulus BAD fit rectus, AB fit axis, A vertex principalis, CD evanescit, & $AK = 0$.

Coroll. VI. Si BAD recto major est, portio parabolæ describetur, sed sitæ ex altera parte puncti A , quam superioribus Coroll. expendimus.

Coroll. VII. Si celeritas, & angulus elevationis, aut ejus complementum ad rectum detur, amplitudo AK , & altitudo parabolæ describendæ reperiri potest. Quoniam enim amplitudo sub angulo 45° est $= \frac{1}{2} AB$ (quæ semper celeritatem projectionis exprimit, acquisitam scilicet lapsu per AB) fiat: ut radius, seu sinus totus, ad finum dupli anguli BAD , ita $\frac{1}{2} AB$ ad amplitudinem quæsitam (per Coroll. I). Habita amplitudine reperiatur altitudo jactus, inferendo: ut sinus totus ad tangentem anguli elevationis; ita CD ($= \frac{1}{4} AK$) ad AC , sive altitudinem.

Coroll. VIII. Si detur amplitudo AK , & angulus DAK , invenitur celeritas ad projectionem necessaria ex sequente analogia: ut sinus dupli anguli BAD ad finum totum; ita dimidia amplitudo data ad AB , sive ad altitudinem, ex qua cadendo celeritas quæsita acquiritur (Coroll. VII).

Coroll. IX. Si celeritas, & amplitudo detur, directio hoc modo invenitur. Inveniatur primo AB

AB ex celeritate data, cum AB sit altitudo, ex qua cadendo acquiritur. 2do fiat: ut $\frac{1}{2}$ AB ad amplitudinem datam; ita radius ad finum dupli anguli inclinationis, quo habito, habetur directio.

Propositio III.

Corpus grave celeritate, quam cadendo ex B in A (fig. 6) acquireret, directione AE projectum, feriet lineam AN in K, ita, ut sit AK = 4 CD, si AG sit ad AN normalis, angulus GBA = GAB, & circulus centro G, radio AG descriptus fecerit lineam directionis in D, ex quo CD ad AN parallela ducitur.

Fig. 6.

Nam angulus ADC (= DAK) = DBA (Elem. 32. 3), adeoque triangula ADC, ADB similia sunt, ob angulum præterea ad A communem. Hinc AC: AD = AD: AB; & quia triangula ACD, PAK similia quoque sunt, estque e proprietate parabolæ AP: PK = PK: 4 AB, obtinetur AD = $\frac{1}{4}$ PK, ideoque CD = $\frac{1}{4}$ AK, seu AK = 4 CD.

Coroll. I. Ducatur ex D parallela ad AB occurrens circulo in d, & per d agatur A d: grave projectum directione A d feriet in eodem puncto K rectam AN, quia cd = CD.

Co-

Coroll. II. Tangat HL ad AB parallela circulum in H ; erit AH directio, qua corpus ad maximam distantiam in linea AN fertur. Puncto enim D incidente in H , CD evadit maxima omnium, quæ a peripheria usque ad AB , & parallelæ cum AK duci possunt, consequenter etiam $AK = 4 CD$ erit maxima. Sed liquet, esse tum $DAN = BAH = HBA$, adeoque directione AH angulum BAN bisecari, quem AN cum verticali AB efficit.

Coroll. III. Lineæ AD , $A d$, si cum AH æquales angulos faciant, etiam anguli DAN , dAB æquales erunt: hisce autem æqualibus, distantia AK est eadem.

Coroll. IV. Si detur AK , & quæratur directio, fiat $AR = \frac{1}{4} AK$, & per R ducatur RD parallela ad AB , occurrens circulo in D , & d ; erunt AD , $A d$ directio-nes quæfitæ.



II.

De cycloide, & motu pendulorum in hac curva.

DEFINITIONES.

SI circulus C D H (fig. 7) ita super linea A Fig. 7.
B volvatur, ut tota ejus peripheria hanc li-
neam sensim tangat, punctum C, quod pri-
mum lineam in A contigit, motu ex circulari, &
rectilineo composito describet curvam A C E B,
quæ cyclois appellatur: A B est basis hujus curvæ;
E F ad A B normalis, eamque in F secans bifa-
riam, axis dicitur; E vertex; circulus, cuius vo-
lutione describitur, vocatur circulus genitor: C K,
basi parallela, est ordinata ad axem; quæ vero
ita occurrit cycloidi, ut producta eam non fecet, di-
citur tangens.

Propositio I.

SI circa axem F E describatur circulus genitor E
G F, qui ordinatam C K fecet in G, erit haec
ordinata C K æqualis summæ ex arcu G E, &
ejus sinu recto G K, sive $C K = EG + GK$.
K k Ex

Ex definitionibus patet, lineam AB æquari toti peripheriae circuli genitoris, adeoque esse AF = EGF. Similiter manifestum est ex ipsa curvæ descriptione, AD æquari arcui DC, adeoque CH rectæ DF, seu IK, vel CG. Est autem CH = EG; igitur etiam GC = GE, & tota ordinata CK (= GC + GK) æquatur suinmæ ex arcu GE, & ejus sinu GK.

Propositio. II.

*R*ecta CH, chordæ EG parallela, cycloidem in C tangit.

Ducatur ck indefinite propinqua ordinatæ alteri CK, quæ occurrat cycloidi in c, circulo in g, axi in k: Cu, Gn axi parallelæ, ordinatam ck in u & n secent: e centro O circuli EGF ducatur radius OG. Quoniam ck = Eg + gk, patet, esse cu = Gg + gn: si dein fingatur ordinata ck infinite accedere ad CK, ita, ut tandem congruant, evanescentibus Gg, Gn, triangula Ggn, GOK fiant similia, adeoque Gg: gn = OG: OK; & Gg + gn : gn = OG + OK (= FK) : OK; est vero etiam

Gn : gn = GK : OK; quare erit quoque Gg + gn : Gn = FK : GK = GK : K E. Hinc ob uc = Gg + gn per demonst. & Cu = Gn, fiet cu : Cu = GK : EK; & si ducaatur chorda Cc, triangula Cuc, EGK erunt similia, ita,

ita, ut accendentibus ad sece punctis C & c, chorda Cc fiat parallela chordæ EG : incidente itaque c in in C , tangens cycloidem in C est chordæ E G parallela.

Propositio. III

Arcus Cycloidis EL est duplus chordæ EM arcus respondentis circuli genitoris EMF.

Sint KL, kS duæ ordinatæ indefinite propinquæ, occurrentes circulo genitori in M & Q. Producatur chorda EM, donec fecet ordinatam kS in P : ex Q demittatur ad MP perpendicularis Q_o; ducantur EN, MN tangentes circulum in E & M. Quoniam triangula ENM, PQM similia sunt, & EN = NM, erit etiam PQ = QM, & triangulum PQM isosceles; hinc perpendicularum Q_o basin PM dividet bifariam, ut sit MP = 2 Mo; est autem, per propos. II, LS parallela & æqualis MP, ideoque etiam 2Mo. Porro LS est incrementum curvæ EL eodem tempore genitum, quo chorda EM quantitate Mo crescit, ob EQ = E_o, punctis Q & M congruentibus : quare incrementa curvæ dupla sunt incrementorum chordæ; & quoniam simul incipiunt in E crescere, erit arcus cycloidis EL semper duplus chordæ EM.

Coroll. Semicyclois ELB æqualis est duplæ diametro circuli genitoris EF; & tota cyclois AC EB, quadruplæ diametro EF.

Propositio IV.

Si sint ER basi AB, & CR axi cycloidis EF parallelæ, erit spatium externum ECR, arcu cycloidis EC, & rectis ER, RC comprehensum æquale areae circulari EGK

Ducatur cr parallela ad CR ; quia (Prop. II) $cu : Cu = GK : EK$, adeoque $EK \times c u = GK \times Cu$, est $Rr \times CR = GK \times Kk$. Est ergo area $CR rc = GK kg$, areæque ECR , EGR æqualiter crescunt, & quia simul augeri incipiunt, æquales etiam totæ sint, oportet.

Coroll. I. Occurrat AT ad basin AB perpendicularis, rectæ ER in T , erit spatium ETA CE æquale semicirculo EGF .

Coroll. II. Quia AF æquatur semicircumfrentiæ EGF ; parallelogrammum $EFAT$, seu factum ex diametro in dimidiam peripheriam, æquatur quadruplo semicirculi EGF ; & hinc area $ECAF$ E æqualis erit triplo areae semicirculi genitoris EGF .

Coroll. III. Si ducatur EA , erit segmentum cycloidis ECA , arcu ECA , & recta EA comprehensum, æquale semicirculo EGF . Cum enim area $ECAF$ æquetur triplo semicirculi EGF , & triangulum $EAF = AF \times \frac{1}{2} EF$, seu facto ex semiperipheria in radium, consequenter

= $\frac{1}{2}$ EGF, erit horum differentia, seu area ECA
E = EGF.

Propositio V.

Si fiat Eb = OK, & ducatur bZ basi parallela, occurratque circulo genitori in X, cycloidi in Z; ac denique jungantur CZ, FX; erit area CZEC æqualis summæ triangulorum GFK, & bFX.

Ducatur Zd axi EF parallela, occurrens ET productæ in d: erit trapezium RCZd = $(\frac{1}{2}CR + \frac{1}{2}Zd) \times Rd = (ob Zd = Eb = OK)$ $\frac{1}{2}OE \times Rd$. Est vero Rd = RE + Ed = CK + bZ = GE + GK + EX + bX; itaque trapezium RCZd est æquale summæ rectangularium ex dimidio radio in summam ex arcibus EG, EX, & eorum finibus GK, bX. Jam vero area EGF, id est, triangulum EGF, & segmentum per chordam EG abicissum, æquatur rectangulo ex dimidio radio in summam ex arcu EG, & ejus finu GK; & area EXF, composita ex sectore EOX, & triangulo XOF, est æqualis rectangulo ex dimidio radio in summam arcus EX, & ejusdem finis bX: quare trapezium RCZd æquatur summæ arearum EGF, & EXF. Porro per Prop. IV est ECR = EGK, & EZd = EbX: si igitur a trapezio auferatur ECR, & EZd; ab areis EGF, EXF vero tollatur EGK, & EbX, mane-

bit spatium CZEC æquale summæ triangulorum GFK, bFX.

Coroll. I. Hinc patet, infinita numero esse segmenta cycloidis, quorum accurata quadratura invenitur. Si exempli causa ordinata CK ponatur radius OE bissecare, K & b congruent, & area ECK fiet æqualis triangulo GKF, & E b Z æqualis FbX, ipsaque hæc duo triangula æqualia erunt.

Coroll. II. Incidat jam K in centrum O, & C in i: quoniam hoc posito OK evanescit, etiam Eb in nihilum abit, & spatium in CZEC fit æquale ECiE, quod æquatur $\frac{1}{2}OE^2$. Nam in hac hypothesi triangulum bFX evanescit.

Propositio VI.

Sit ATC semicyclois vertice A deorsim verso, &
basi EC horizonti parallelâ: suspendatur in C
ex filo ejusdem longitudinis cum semicycloide pendulum P,
quod si filo semicyclodi applicato ex A demittatur, fi-
lum sensim a semicycloide separabit, & alteram semicyclo-
dem APV priori ATC æqualem describet, cuius
vertex V, & axis horizonti perpendicularis.

Fig. 8. (fig. 8).

Describatur super axe AE semicirculus geni-
tor AGE, & ducatur AB, verticalem CV in D
secans: accipiatur DV = AE, & super ea fiat
semi-

semicirculus D H V. Quoniam semicyclois æquatur $\frac{1}{2}$ A E , seu C V (per Coroll. Propos. III) , corpus P perveniet ad V , filo ad situm verticalem extenso. Ducantur per P , & T rectæ T G , & P H parallelæ ad A D , quæ occurrant semicirculis in G & H : & quia portio extensa in directum fili T P æqualis est arcui A T , cui prius congruebat , erit T P = $\frac{1}{2}$ A G = $\frac{1}{2}$ T K , & hinc T K = K P , adeoque puncta G & H a linea A D æqualem habent distantiam , & arcus A G æquatur arcui D H , angulusque G A D = A D H , ac chordæ A G , & D H parallelæ sunt.

Quia vero T P cycloidem in punto T tangit , parallelæ est chordæ G A ; adeoque D K P H est parallelogrammum , & D K = P H . Dein est arcus A G = G T (per Propos. I) ; igitur etiam = A K ; & ob A D = A G E , sequitur , esse D K seu P H = G E vel H V : & si P H producatur , donec occurrat axi in R , erit ordinata P R = H V + H R , ac propterea P (per Propos. I) in semicycloide , cuius circulus genitor D H V , axis D V , & vertex V .

Coroll. Si altera semicyclois priori C T A æqualis , velut C t B , situ contrario constituantur , manifestum , ope harum semicycloidum fieri posse , ut pendulum suas oscillationes in cycloide A V B peragat .

Propositio VII.

Sit VL' ad DV normalis, & arcui cycloidis VML aequalis; describatur radio VL' semi-circulus $L'Zl$: quod si pendulum oscillationem in cycloide incipiat a puncto L , erit ejus velocitas in M acquisita, ut ordinata circuli $M'X$ ad punctum M respondens puncto M cycloidis in recta VL' ; & vis acceleratrix in M , ut arcus cycloidis VM usque ad infimum punctum V percurrendus.

Occurrant axi DV normales RL , SM in O & Q circulo genitori, ducanturque chordæ VO , VQ ; erit (Coroll. III Lem. III) velocitas penduli in M eadem, ac quæ acquiretur descensu perpendiculari ex R in S ; quæ vero in V habetur, erit eadem cum illa, quæ lapsu per RV acquiri potest. Sunt autem hæ velocitates inter se, ut \sqrt{RS} ad \sqrt{RV} (Coroll. II Lem. I); & quia $RV: SV = VO^2: VQ^2$; & $RV: RV - SV (= RS) = VO^2: VO^2 - VQ^2 = VL^2: VL^2 - VM^2$ (ob $VL = \sqrt{VO}$, & $VM = \sqrt{VQ}$ per Propos. III); sequitur, velocitatem penduli in M esse ad ejusdem velocitatem in V , ut $\sqrt{(VL^2 - VM^2)}$ ad $\sqrt{VL^2}$, seu (ob $VL = VL'$, & $VM = VM'$, & $M'X^2 = VL'^2 - VM'^2$) ut $M'X$ ad VL' vel VZ .

Gra-

Gravitas, quæ in descensu pendulorum ut constans haberi potest, exhibeatur, si ad directionem verticalem refertur, diametro DV, & in DQ & VQ resolvatur, quarum pars prior, filo tM parallela, tantummodo tendendo filo impenditur, nihilque ad descensum penduli confert, atque hinc sola pars VQ motum penduli per arcum Mm accelerat, totaque in hunc effectum insumitur, utpote cum ejus directio parallela sit tangentia cycloidis in M (per Propos. II). Est autem VM = 2 VQ, per Propos. III; igitur vis acceleratrix penduli in M, est ut arcus cycloidis VM.

Coroll. Ex demonstratione intelligitur, partem gravitatis a filo in quovis puncto M sustentatam esse ad gravitatem totam penduli, ut est chorda DQ ad diametrum.

Propositio VIII.

Cogitetur corpus X motu æquabili, & celeritate, quam pendulum in V acquirit, percurrere circulum LZl; arcus quivis cycloidis, ut MN, describetur a pendulo eodem tempore, quo arcus circuli XY a corpore X motu æquabili, si fiat VN æqualis arcui cycloidis VN, & ducatur NY parallela ad VZ.

Sit $x m$, ordinatæ $X M'$ indefinite propinqua, & $X r$ diametro $l L'$ parallela, secetque $x m$ in r . Quia triangula $X r x$, $V X M'$ similia sunt, est $X x : M' m (= X r) = V X : M' X$, hoc est, ut celeritas corporis X ad celeritatem corporis M ; hinc spatia $X x$ & $M m$ percurrentur eodem tempore, cum tempora semper sint æqualia, quando spatia sunt ut celeritates. Eodem modo partes quævis aliæ respondentes linearum $M N$ & $X Y$ temporibus æquilibus describentur; ideoque & totum spatiū $M N$ conficitur a pendulo eodem tempore, quo corpus X arcum $X Y$ percurrit.

Coroll. Describetur itaque arcus $L V$ a pendulo tempore eodem, quo conficitur a corpore X quadrans $L' Z$.

Propositio IX.

Tempus oscillationis integræ in cycloide est ad tempus descensus perpendicularis per axem $D V$, ut est peripheria circuli ad diametrum.

Tempus, quo semicircumferentia $L' Z l$ a corpore X describitur, est ad tempus, quo velocitate eadem percurreretur radius $L' V$, ut peripheria circuli ad diametrum; est autem tempus, quo a corpore X semicircumferentia $L' Z l$ percurritur, æquale tempori oscillationis integræ **LVP**

LVP in cycloide per Corol. Propof. VIII: & tempus, quo corpus describit chordam OV, æquale est tempori, quo LV (= 2 OV) describeretur celeritate in V acquisita, per coroll. I Lem. I, & Coroll. III Lem. III: & præterea tempus descensus per chordam, est æquale tempori descensus per axem DV, per coroll. IV Lem. III: itaque tempus, quo L'V (= LV) percurreretur celeritate illa, quam ponitur habere corpus X, æquatur tempori descensus per axem DV. Unde conficitur, tempus oscillationis integræ per LV P, esse ad tempus descensus per axem DV, ut est peripheria circuli ad suam diametrum.

Coroll. I. Sunt igitur omnes oscillationes penduli in cycloide ejusdem temporis, cum sint omnes in ratione eadem ad tempus descensus per diametrum DV. Et hinc pendulum oscillans per arcum quemvis cycloidis eodem indiget tempore, quo absolveretur oscillatio per totam cycloidem BVA, neque citius percurret arcum minimum, quam maximum.

Coroll. II. Arcus infimus cycloidis V concipi potest velut congruens cum arcu exiguo circuli centro C descripti, & per V transeuntis, eritque tempus oscillationis in ejusmodi exiguo arcu circuli æquale tempori oscillationis in cycloide. Ex quo facile intelligitur, cur tempora oscillationum in arcibus valde parvis circuli æqualia sint, utpote cum hi arcus non minus ad cycloidem, quam ad circulum pertinere possint.

Coroll. III. Tempus oscillationis integræ in exiguo arcu circuli, est ad tempus descensus per dimidium radium, ut peripheria circuli ad diametrum: & quia tempus hoc descensus per dimidium radium est subduplicum ejus, quo cadendo tota describeretur diameter, aut chorda quævis, sequitur, tempus oscillationis in exiguo arcu circuli, esse ad tempus descensus obliqui per chordam, ut est semicircumferentia ad diametrum.

Esto NV arcus exiguus circuli centro C descriptus; tantum aberit, ut tempus per arcum AV æquetur tempori descensus per chordam NV, ut etiam punctis N & V in infinitum ad sece accedentibus, ratio horum temporum ultima futura sit circumferentiæ circuli ad quadruplum diametri. Unde vitandus est error, in quem plures scriptores Mechanices inciderunt, qui ex æqualitate chordæ, & arcus evanescens præpropere intulerunt æqualitatem temporis descensus per arcum, cum tempore descensus per chordam.

Coroll. IV. Tempora oscillationum in cycloide, vel arcibus circuli exiguis sunt in ratione subduplicata longitudinum pendulorum. Etenim tempora oscillationum in arcu LVP sunt in ratione constante ad tempus descensus per DV; hoc autem est in ratione subduplicata spatii DV, seu ejus dupli CV, quæ est longitudo penduli.

Coroll. V. Quod si vires acceleratrices corporum forent inæquales, tempora oscillationum essent in

in ratione composita ex directa subduplicata longitudinum pendulorum, & subduplicata reciproca virium acceleratricium. Nam tempus descensus per DV est in ratione directa subduplicata spatii DV, & reciproca subduplicata vis acceleratricis; & tempus oscillationis est ad illud in ratione data. Ex quo patet, quod si pendulorum inæqualium oscillationes sint æquales, vires acceleratrices gravitatis sint ut pendulorum longitudines. Et hinc inferimus, vim gravitatis ab æquatore versus polos crescere, cum pendulorum minuta secunda oscillantium longitudines versus æquatorem minui debeant.

Coroll. VI. Ex hac propositione reperitur accurate spatium, quod corpus grave tempore dato cadendo conficit. Etenim si captis experimentis inveniatur, cuius longitudinis pendulum eo tempore oscillationem absolvat, erit longitudo hæc penduli dimidia ad spatium quæsumum, in ratione duplicata diametri ad peripheriam; nam spatia cadendo confecta sunt ut quadrata temporum, quibus percurruntur; & ratio temporum, quibus ea spatia conficiuntur, est ratio diametri ad peripheriam. Hunc in modum Hugenius demonstrat, a corporibus sua gravitate libere cadentibus tempore unius minutus secundi percurri $15 \frac{1}{2}$ ped. Paris.

Scholium. Ut comprehendatur penitus, quod arcus exiguus non eodem tempore, quo ejus chorda, percurratur, quamvis, dum evanescunt, æquales sint; ostendemus, quod si V_k , & N_k sint plana tangentia arcum in V & N , licet chorda eva-

nescens NV summæ utriusque tangentis V_k & N_k æqualis fit, tempus tamen descensus per chordam fit ad tempus descensus per has tangentes, ut 4 ad 3.

Per Coroll. I Lem. III tempus per N_k est ad tempus per NV, ut N_k ad NV, seu ut 1 ad 2; sed cum kV sit horizontalis, motus per kV est uniformis, & percurritur tempore dimidio ejus, quo corpus ex N in k caderet: igitur si tempus, quo kV motu uniformi describitur, dicatur T, erit tempus per $N_k = 2T$, & tempus per chordam NV = 4 T, adeoque tempus descensus per tangentes binas, est ad tempus descensus per chordam, ut 3 ad 4.

FINIS LIBRI SECUNDI.



EXPO-